

Série A, n° 990

N° D'ORDRE : 1014

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(Mention SCIENCES)

PAR

Pierre BLANC

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1^{re} THÈSE. — Analyse des fondements logiques et expérimentaux des lois de l'électromagnétisme classique.

2^e THÈSE. — La propulsion spatiale à source d'énergie séparée.

Soutenues le 12 JUIN 1963 devant la Commission d'examen.

MM. SOLEILLET. *Président.*

BRUN.
COTTE.

} *Examineurs*

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

1963

Série A, n° 990

N° D'ORDRE : 1014

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(Mention SCIENCES)

PAR

Pierre BLANC

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1^{re} THÈSE. — Analyse des fondements logiques et expérimentaux des lois de l'électromagnétisme classique.

2^e THÈSE. — La propulsion spatiale à source d'énergie séparée.

Soutenues le

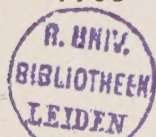
1963 devant la Commission d'examen.

MM. SOLEILLET. *Président.*

BRUN. }
COTTE. } *Examineurs.*

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

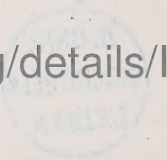
1963





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548801_0034



ANALYSE DES FONDEMENTS
LOGIQUES ET EXPÉRIMENTAUX
DES LOIS
DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE

PAR

P. BLANC

INGÉNIEUR EN CHEF DE L'ARTILLERIE NAVALE

INTRODUCTION

1. La théorie de l'électromagnétisme classique permet de calculer l'accélération que prend une particule chargée, fixe ou mobile, sous l'influence d'un système S de particules chargées également fixes ou mobiles, ce qui est effectivement un phénomène fondamental. Nous désignerons par « loi générale de l'électromagnétisme » l'ensemble des relations qui est nécessaire pour effectuer ce calcul, c'est-à-dire :

(a) Les équations de MAXWELL, qui permettent de calculer le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{H}$ au point où se trouve actuellement la particule q considérée qui a pour vitesse v ;

(b) L'expression de la force de LORENTZ, soit $\vec{F} = q(\vec{\varepsilon} + \vec{v} \wedge \vec{\mathcal{H}})$ qui permet de passer des champs à la force relativiste qui s'exerce sur la particule;

(c) L'expression de définition $\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right)$ qui, en faisant intervenir la variation de la masse avec la vitesse, permet de passer de la force à l'accélération.

Mais on peut également se placer à un autre point de vue en postulant, par une représentation schématique simplifiée à l'extrême, que les corps conducteurs sont constitués de particules positives et de particules négatives, ces dernières pouvant se déplacer par rapport aux premières pour constituer un courant électrique. Tout phénomène d'un caractère électromagnétique peut alors se ramener en dernière analyse à un ensemble d'interactions entre particules en mouvement relatif.

Il suffit donc pour décrire un tel phénomène, de connaître la loi d'interaction entre deux particules quelconques en mouvement relatif. De plus, comme on peut toujours choisir un système de référence lié à l'une de ces deux particules à l'instant considéré, il suffit de connaître la loi d'interaction entre une particule fixe et une particule mobile. Enfin, si l'on admet qu'il n'y a pas de système privilégié, et pour deux particules identiques, il suffit même de ne connaître que l'une des deux forces en présence, soit la force exercée par la particule mobile sur la particule fixe, soit la force exercée par la particule fixe sur la particule mobile : l'autre force s'en déduira par réciprocity à l'aide d'un changement approprié du système de référence.

Naturellement, l'application de la loi générale (a) (b) (c) de l'électromagnétisme classique permet d'établir cette loi d'interaction entre particules, que nous appellerons *loi particulière*.

Par exemple, si l'on veut déterminer la loi particulière classique dans le cas de l'influence d'une particule fixe q' sur une particule mobile q , on dira :

(a) que le champ de la particule au repos est $-q' \frac{\vec{r}}{r^3}$;

(b) que la force sur la particule mobile s'en déduit en multipliant par la charge de cette particule, soit $-qq' \frac{\vec{r}}{r^3}$;

(c) que l'accélération de la particule mobile s'en déduit en projetant cette force sur la vitesse puis sur la normale à la vitesse de la particule mobile et en tenant compte de la masse longitudinale et de la masse transversale.

L'utilisation de la loi particulière ainsi obtenue, étendue par changement d'axes de référence au cas où la particule influençante est mobile, et appliquée à tout le système S des particules influençantes, est absolument équivalente à l'utilisation directe de la loi générale. Autrement dit, le fait que le champ d'une particule fixe soit $-q' \frac{\vec{r}}{r^3}$, la donnée de l'expression de la force de LORENTZ et aussi la définition de la masse relativiste permettent de démontrer les équations de MAXWELL.

En langage quadrivectoriel, cette liaison est encore plus directe, du point de vue formel : une particule influençante détermine en chaque point de l'espace un tenseur champ électromagnétique $\vec{T}$ et une particule influencée quel-

conque, définie par sa vitesse propre $\bar{V}$, est soumise à une force absolue $m_0 \bar{\Gamma} = \bar{T} \cdot \bar{V}$.

Nous retiendrons donc que l'utilisation, soit de la loi générale sous sa forme (a) (b) (c) comprenant en particulier les équations de MAXWELL, soit celle de la loi générale sous forme de tenseur quadridimensionnel, soit celle de la loi particulière, sont absolument équivalentes.

Mais si l'on veut rechercher le fondement expérimental de ces lois, il y a lieu d'accorder une préférence à la loi sous forme particulière, car elle nous permet une liaison commode avec les phénomènes expérimentaux. On sait en effet que les équations de MAXWELL ne sont pas à proprement parler démontrées par ces phénomènes expérimentaux, mais seulement vérifiées dans leurs conséquences (indépendamment du fait qu'une loi ne peut jamais être complètement démontrée par l'expérience, dont les données sont d'une précision obligatoirement limitée). Par contre la loi sous forme particulière permet comme nous allons le voir, de suivre le processus inverse.

Nous nous proposons donc de considérer comme donnés un certain nombre de faits expérimentaux et de chercher à en déduire la loi d'interaction sous forme particulière.

2. Historiquement, la théorie de l'électromagnétisme classique, sous la forme (a) (b) (c) rappelée ci-dessus, n'a été établie que par une suite d'inductions et de déductions assez complexes, et ceci d'autant plus que le postulat de relativité restreinte est apparu au cours de son développement.

Aussitôt après la découverte des phénomènes électromagnétiques, AMPÈRE avait cherché à déduire une loi d'interaction entre éléments de courant à partir des lois expérimentales qu'il connaissait et du postulat de l'égalité de l'action et de la réaction.

Puis, dès le moment où les courants ont pu être interprétés comme des systèmes de particules, de nombreux essais furent tentés pour établir une loi d'interaction entre particules. Ces essais sont évidemment restés infructueux, du fait, comme nous aurons l'occasion de le préciser, que le postulat de la relativité n'avait pas encore été formulé et que son utilisation est indispensable pour l'établissement d'une loi particulière adéquate aux données expérimentales.

Les équations de MAXWELL ont ensuite été obtenues autant par raisonnement inductif que deductif, puis admises par leurs conséquences expérimentales et finalement consacrées par le fait qu'elles satisfaisaient au principe de la relativité. L'utilisation de ces équations met davantage l'accent sur les densités de charge et les densités de courant que sur le nombre et la vitesse des particules, mais on peut évidemment en déduire, comme il a été dit, l'expression d'une loi particulière. Aussi la recherche d'une loi particulière directement à partir de l'expérience a pu paraître avoir perdu son intérêt dès que l'invariance des équations de MAXWELL a été établie.

Nous avons pensé au contraire qu'il ne serait pas inutile de reprendre cette recherche, c'est-à-dire, en repartant à l'origine, d'examiner dans quelle mesure une loi particulière pouvait être déduite des données expérimentales. Cette recherche permet en même temps de mettre en évidence la part non expérimentale qui entre dans l'expression de la loi particulière, c'est-à-dire :

- (1) les postulats qu'il est nécessaire de faire intervenir;
- (2) les axiomes utilisés;
- (3) les conventions qui interviennent dans le choix des grandeurs physiques et mathématiques utilisées.

Elle sera menée en conservant le plus possible l'aspect cinématique des phénomènes et en évitant de faire intervenir la notion de champ magnétique.

3. Les données expérimentales à envisager peuvent être classées en trois catégories :

- | | |
|--|---|
| (A) Influence mutuelle courant-courant | } au repos relatif ou en mouvement relatif. |
| (B) Influence mutuelle courant-particule | |
| (C) Influence mutuelle particule-particule | |

(A). En ce qui concerne l'influence mutuelle des courants, on distinguera trois cas :

- (A1) — influence mutuelle de deux courants constants fixes (généralisation de la loi de LAPLACE aux circuits fermés);
- (A2) — influence d'un courant constant fixe sur un circuit mobile parcouru ou non par un courant (première loi de l'induction);
- (A3) — influence d'un courant fixe et d'intensité variable sur un circuit fixe (seconde loi de l'induction).

(B). On aura à faire intervenir la valeur de l'influence (classiquement nulle) d'un courant fixe constant sur une particule chargée fixe. Lorsque cette particule est mobile, il s'ajoute l'influence (A2) ci-dessus.

(C). L'influence particule-particule est justement la loi particulière que nous cherchons. C'est dire qu'il faut admettre que l'on ne possède pas de données expérimentales suffisamment précises pour écrire d'emblée l'expression de l'influence mutuelle de deux particules en mouvement relatif. Toutefois, dans le cadre d'une particule en mouvement accéléré, on dispose des données expérimentales que sont les influences radiales et axiales d'une particule oscillante.

En définitive, la démarche sera la suivante. On se donnera la loi particulière sous une forme indéterminée la plus générale. Cette forme sera d'abord précisée d'une part en la mettant sous la forme d'un développement en série qui permettra de limiter les termes en fonction de la précision des données expérimentales et d'autre part en tenant compte d'un certain nombre d'axiomes et de postulats (application du principe de symétrie, du principe de réciprocité, du principe de relativité, de la nécessité de retrouver la loi de COULOMB au repos, etc.).

Cela étant, on aura ainsi obtenu une expression de la loi particulière contenant un certain nombre de paramètres encore indéterminés. Ces paramètres seront alors fixés en écrivant que la loi doit satisfaire aux cinq conditions expérimentales ci-dessus (A1) (A2) (A3) (B) et (C).

CHAPITRE PREMIER

LOI GÉNÉRALE DE L'INTERACTION
DE DEUX ÉLÉMENTS DE COURANT

§ 1. Exposé

La force exercée par un élément de courant d'intensité I_1 et de longueur ds_1 sur un second élément d'intensité I_2 et de longueur ds_2 situé à la distance r du premier, est d'une façon générale exprimée par la loi dite de LAPLACE :

$$d^2\vec{F} = \frac{I_1 I_2}{r^2} \overline{ds_2} \wedge (\overline{u_r} \wedge \overline{ds_1})$$

où $\overline{u_r}$ est le vecteur unitaire de la direction de l'élément (2) vers l'élément (1).

On sait que cette loi non vérifiable expérimentalement du fait de l'impossibilité d'isoler deux éléments de courant, n'est qu'un moyen de calcul commode permettant de traiter le cas de courants fermés. En fait, on peut également utiliser d'autres lois élémentaires qui conduisent aux mêmes résultats que celle-ci, conformes à l'expérience, lorsqu'elles sont appliquées par intégration à des circuits fermés.

Par exemple, AMPÈRE a proposé, dès l'origine des recherches sur l'électricité (réf. 1) une loi élémentaire qui satisfait au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, alors que la loi de LAPLACE ne satisfait pas à ce principe (du moins le cas général), puisque les forces sont normales aux éléments de courant.

Nous nous proposons d'établir, dans les chapitres I et II, *la forme la plus générale de la loi élémentaire* telle que ses conséquences soient conformes à l'expérience ⁽¹⁾.

§ 2. Définitions

Considérons deux éléments de courant de longueur ds_1 et ds_2 séparés par une distance r et porteurs de courants d'intensités I_1 et I_2 . Il s'agit de calculer la force exercée par l'élément (1) sur l'élément (2). Nous pouvons donner un

⁽¹⁾ La méthode de calcul qui sera suivie au départ sera celle utilisée par MOON et SPENCER (réf. 2). Nous ne sommes pas d'accord avec ces auteurs, tant sur le fond (ils n'admettent pas la relativité, du moins au sens d'EINSTEIN) que sur certains détails de calcul. Mais les symboles et notations qu'ils ont employés sont particulièrement bien adaptés à la mise en équations du problème en cause.

sens arbitraire aux vecteurs $\overline{ds}$, étant donné que nous conviendrons de considérer les intensités comme des quantités algébriques positives ou négatives selon que les courants auront le même sens que les vecteurs $\overline{ds}$ ou le sens contraire.

Prenons comme système de coordonnées cartésiennes (r, n, p) le système caractérisé de la façon suivante (fig. 1) :

- origine sur l'élément (2);
- axe r : droite reliant l'élément (2) à l'élément (1). Son vecteur unitaire $\overline{u}_r$ sera dirigé de l'élément (2) vers l'élément (1);
- axe n : tel que l'élément (2) soit dans le plan (r, n) . Son vecteur unitaire $\overline{u}_n$ sera de sens quelconque;
- axe p : perpendiculaire au plan (r, n) . Son vecteur unitaire $\overline{u}_p$ sera dirigé de telle sorte que le trièdre trirectangle obtenu sera positif dans le sens (r, n, p) .

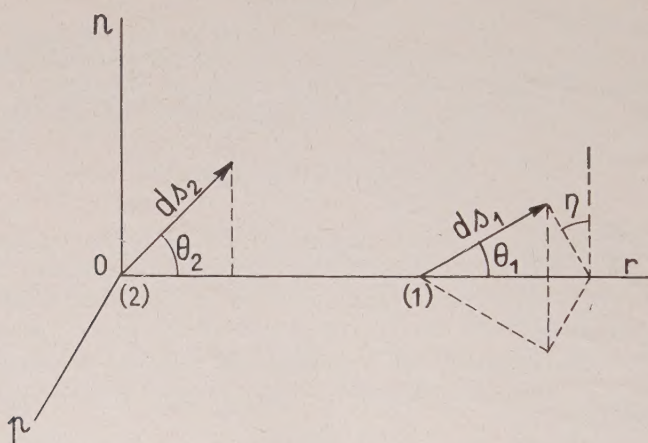


Fig. 1

Soient θ_1 et θ_2 les angles orientés que font les vecteurs $\overline{ds}_1$ et $\overline{ds}_2$ avec le vecteur unitaire $\overline{u}_r$. Soit également η l'angle orienté que fait le plan $(\overline{u}_r, \overline{ds}_1)$ avec le plan $(\overline{u}_r, \overline{ds}_2)$.

Dans ces conditions, les coordonnées de $\overline{ds}_1$ et de $\overline{ds}_2$ sont les suivantes :

$$(I-1) \quad \overline{ds}_1 \begin{cases} ds_1 \cos \theta_1 \\ ds_1 \sin \theta_1 \cos \eta \\ ds_1 \sin \theta_1 \sin \eta \end{cases} \quad \overline{ds}_2 \begin{cases} ds_2 \cos \theta_2 \\ ds_2 \sin \theta_2 \\ 0. \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$(I-2) \quad \begin{cases} \overline{ds}_1 = \overline{u}_r ds_1 \cos \theta_1 + \overline{u}_n ds_1 \sin \theta_1 \cos \eta + \overline{u}_p ds_1 \sin \theta_1 \sin \eta \\ \overline{ds}_2 = \overline{u}_r ds_2 \cos \theta_2 + \overline{u}_n ds_2 \sin \theta_2. \end{cases}$$

§ 3. Postulats

Les données de l'expérience sur les courants fermés conduisent à formuler (au moins à titre provisoire) les postulats suivants, relativement aux éléments de courant.

POSTULAT 1^{er}. — La force exercée par un élément de courant $\overline{ds_1}$ d'intensité I_1 sur un autre élément de courant $\overline{ds_2}$ d'intensité I_2 :

- 1^o est proportionnelle aux intensités I_1 et I_2 (valeurs algébriques);
- 2^o est proportionnelle aux longueurs ds_1 et ds_2 ;
- 3^o est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux éléments.

POSTULAT 2nd. — Un élément de courant $I \overline{ds}$ peut être remplacé par ses composants $I dx$, $I dy$, $I dz$. En outre, cela ne modifie pas la force exercée sur tout autre élément de courant.

La première proposition du postulat 1^{er} est arbitraire, car dans l'interprétation corpusculaire, la notion d'intensité fait intervenir à la fois la densité de charge électrique et la vitesse des charges et si la proportionnalité à la densité est évidente, il n'en est pas de même pour la vitesse; nous admettrons cependant cette proposition dans le calcul qui va suivre, au moins à titre provisoire. La seconde proposition semble assez naturelle. Quant à la troisième, elle s'explique par la nature particulière des charges.

Le postulat 2nd est également assez arbitraire. Il importe de souligner qu'il est cependant à la base des calculs qui vont suivre. Aussi le considérerons-nous jusqu'à nouvel ordre comme étant vérifié *a posteriori* par l'expérience.

Le fondement de ces postulats provisoires sera d'ailleurs réexaminé par la suite.

§ 4. Calcul de la force entre éléments

L'application du postulat 2nd permet de décomposer la force exercée par l'élément (1) sur l'élément (2) en un certain nombre de composantes qui sont les forces exercées par chacune des composantes de $I_1 ds_1$ sur chacune des composantes $I_2 ds_2$; on est ainsi amené à ne considérer que l'interaction d'éléments de courants parallèles ou perpendiculaires entre eux (fig. 2).

Convenons de désigner par d^2F_{ijk} la k ième composante de la force exercée par la i ième composante de $I_1 ds_1$ sur la j ième composante de $I_2 ds_2$, et par A_{ijk} une constante convenable encore inconnue. Les indices auront les valeurs ($i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2$ $k = 1, 2, 3$).

La première composante d^2F_r aura pour expression :

$$d^2F_r = d^2F_{111} + d^2F_{211} + d^2F_{311} + d^2F_{121} + d^2F_{221} + d^2F_{321}$$

avec, d'après les relations (I-2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2 F_{111} = \frac{I_1 I_2}{r^2} (ds_1 \cos \theta_1) (ds_2 \cos \theta_2) A_{111} \\ d^2 F_{211} = \frac{I_1 I_2}{r^2} (ds_1 \sin \theta_1 \cos \eta) (ds_2 \cos \theta_2) A_{211} \\ \text{etc...} \end{array} \right.$$

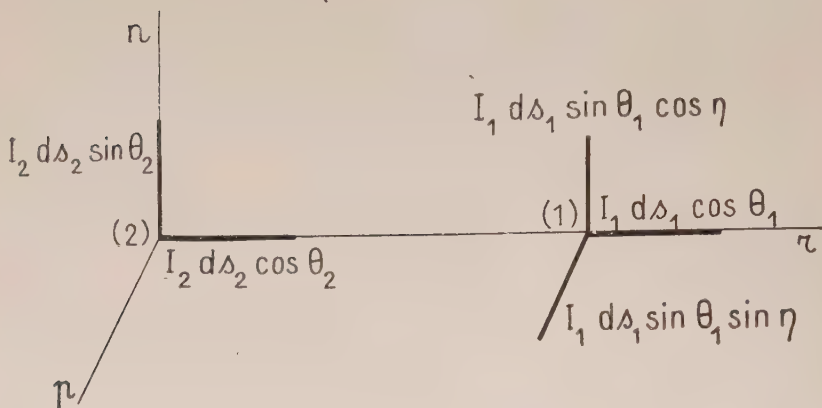


Fig. 2

Les autres composantes auront des expressions analogues. Finalement, on obtient :

$$(I-3) \left\{ \begin{array}{l} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{111} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{211} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta \\ \quad + A_{311} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta + A_{121} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \quad + A_{221} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta + A_{321} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \eta) \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{112} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta \\ \quad + A_{312} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta + A_{122} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \quad + A_{222} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta + A_{322} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \eta) \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{113} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{213} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta \\ \quad + A_{313} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta + A_{123} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \quad + A_{223} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta + A_{323} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \eta). \end{array} \right.$$

§ 5. Réduction du nombre des coefficients

Il convient de remarquer qu'il est possible de réduire le nombre des coefficients A_{ijk} par des considérations d'un ordre purement logique telles que des raisons de symétrie.

C'est ainsi par exemple que si l'on considère deux éléments colinéaires suivant l'axe r , la force correspondante est obligatoirement orientée suivant cet axe, puisqu'aucune direction perpendiculaire n'a de caractère privilégié. Il en résulte que :

$$A_{112} = 0 \quad \text{et} \quad A_{113} = 0.$$

De même, il est facile de voir que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{311} = A_{211} \\ A_{312} = -A_{213} \\ A_{313} = A_{212}. \end{array} \right.$$

On peut également appliquer une méthode plus générale pour obtenir des relations purement logiques (c'est-à-dire non expérimentales) entre ces coefficients, en utilisant le *principe de symétrie* que l'on peut énoncer ainsi :

Postulat. — Un ensemble d'éléments de courant qui serait symétrique de celui représenté par la fig. 2, par rapport à un plan donné, présenterait des interactions également symétriques des précédentes par rapport à ce même plan.

Corollaire. — Les interactions de deux éléments de courant coplanaires sont des forces situées dans le plan de ces éléments.

Appliquons donc le postulat précédent en prenant tour à tour comme plan de symétrie les plans (r, n) puis (r, p) , puis (n, p) .

1° SYMÉTRIE PAR RAPPORT AU PLAN (r, n) . — L'application du postulat est immédiate et permet de dire : si l'on change η en $-\eta$, la force (F_r, F_n, F_p) devient $(F_r, F_n, -F_p)$.

On doit donc avoir, d'après (I-3).

$$A_{311} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta + A_{321} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \eta = 0$$

$$A_{312} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta + A_{322} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \eta = 0$$

$$A_{113} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{213} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta + A_{123} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ + A_{223} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta = 0.$$

Cela n'est possible quelles que soient les valeurs de θ_1 , θ_2 et η (on le voit en donnant à ces angles des valeurs particulières telles que 0 et $\frac{\pi}{2}$), que si l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{llll} A_{311} = 0 & A_{321} = 0 \\ A_{312} = 0 & A_{322} = 0 \\ A_{113} = 0 & A_{213} = 0 & A_{123} = 0 & A_{223} = 0. \end{array} \right.$$

2° SYMÉTRIE PAR RAPPORT AU PLAN (r, p) . — Si l'on change θ_2 en $-\theta_2$ et η en $\pi - \eta$, c'est-à-dire si l'on change le signe de $\sin \theta_2$ et de $\cos \eta$, la composante F_n change de signe mais non F_r ni F_p .

Les relations (I-3) permettent d'obtenir, de la même façon que ci-dessus :

$$\begin{cases} A_{211} = 0 & A_{121} = 0 & A_{321} = 0 \\ A_{112} = 0 & A_{312} = 0 & A_{222} = 0 \\ A_{213} = 0 & A_{123} = 0 & A_{323} = 0. \end{cases}$$

3° SYMÉTRIE PAR RAPPORT AU PLAN (n, p) . — Un calcul analogue aux précédents donne également six relations de la forme $A_{ijk} = 0$, mais nous ne reproduirons pas ce calcul car on trouve que ces relations figurent déjà parmi celles qui ont été obtenues dans les deux cas précédents.

Finalement, en réunissant l'ensemble des résultats obtenus, les dix-huit coefficients A_{ijk} sont réduits à quatre par un processus purement logique. Ces quatre coefficients restants sont les suivants, les autres étant nuls :

$$A_{111}, \quad A_{122}, \quad A_{221}, \quad A_{212} = A_{313}.$$

§ 6. Expressions de la force exercée par (1) sur (2)

Les relations (I-3) peuvent donc s'écrire :

$$(I-4) \quad \begin{cases} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{111} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{221} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{122} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta) \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta). \end{cases}$$

Ces relations (I-4), qui sont fondamentales dans l'étude qui va suivre, sont les relations *les plus générales* satisfaisant aux postulats 1^{er} et 11^{es} (et naturellement au postulat de symétrie). A moins que de nouveaux postulats ne permet-

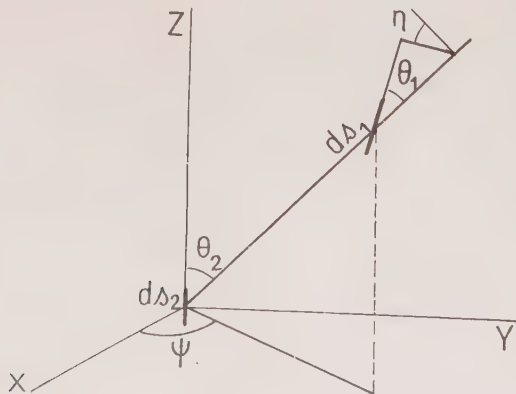


Fig. 3

tent de déterminer les quatre A_{ijk} restants, ceux-ci restent du domaine de l'expérience.

Il sera utile par la suite d'employer également un autre système d'axes de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z), tel que (fig. 3) le vecteur $\overline{ds_2}$ soit placé à l'origine O et dirigé suivant OZ. Le plan vertical contenant le rayon vecteur r fait un angle ψ avec OX. L'emplacement de l'élément $\overline{ds_1}$ est donc défini par (ψ, θ_2, r) ; quant à la direction de cet élément, elle est toujours définie par θ_1 et η .

On a donc d'une part :

$$(I-5) \quad \begin{cases} X = r \sin \theta_2 \cos \psi \\ Y = r \sin \theta_2 \sin \psi \\ Z = r \cos \theta_2. \end{cases}$$

et d'autre part :

$$(I-6) \quad \begin{cases} \sin \theta_1 \cos \eta \, ds_1 = -r \, d\theta_2 \\ \cos \theta_1 \, ds_1 = dr \\ \sin \theta_1 \sin \eta \, ds_1 = -r \sin \theta_2 \, d\psi. \end{cases}$$

Les relations (I-4) deviennent alors :

$$(I-7) \quad \begin{cases} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 \, ds_2}{r^2} (A_{111} \cos \theta_2 \, dr - A_{221} r \sin \theta_2 \, d\theta_2) \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 \, ds_2}{r^2} (A_{122} \sin \theta_2 \, dr - A_{212} r \cos \theta_2 \, d\theta_2) \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 \, ds_2}{r^2} (-A_{212} r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \, d\psi) \end{cases}$$

et comme d'autre part les composantes de la force suivant (X, Y, Z) ont pour valeur :

$$(I-8) \quad \begin{cases} d^2 F_x = d^2 F_r \sin \theta_2 \cos \psi - d^2 F_n \cos \theta_2 \cos \psi + d^2 F_p \sin \psi \\ d^2 F_y = d^2 F_r \sin \theta_2 \sin \psi - d^2 F_n \cos \theta_2 \sin \psi - d^2 F_p \cos \psi \\ d^2 F_z = d^2 F_r \cos \theta_2 + d^2 F_n \sin \theta_2 \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$(I-9) \quad \begin{cases} d^2 F_x = \frac{I_1 I_2 \, ds_2}{r^2} [(A_{111} - A_{122}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \psi \, dr \\ \quad + (A_{212} \cos^2 \theta_2 - A_{221} \sin^2 \theta_2) r \cos \psi \, d\theta_2 \\ \quad - A_{212} r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi \, d\psi] \\ d^2 F_y = \frac{I_1 I_2 \, ds_2}{r^2} [(A_{111} - A_{122}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi \, dr \\ \quad + (A_{212} \cos^2 \theta_2 - A_{221} \sin^2 \theta_2) r \sin \psi \, d\theta_2 \\ \quad + A_{212} r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \psi \, d\psi] \\ d^2 F_z = \frac{I_1 I_2 \, ds_2}{r^2} [(A_{111} \cos^2 \theta_2 + A_{122} \sin^2 \theta_2) \, dr \\ \quad - (A_{221} + A_{212}) r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \, d\theta_2]. \end{cases}$$

Les expressions des composantes de la force $d^2\bar{F}$ exercée par l'élément (1) sur l'élément (2) seront utilisées dans ce qui va suivre, soit sous leur forme (I-4), soit sous leur forme (I-9) selon la commodité de leur emploi.

§ 7. Expressions de la force exercée par (2) sur (1)

Cette force peut se calculer en appliquant les relations (I-4) avec un système d'axes approprié ayant son origine sur l'élément (1). En revenant aux anciens axes, on obtient alors :

$$(I-10) \quad \begin{cases} d^2G_r = -\frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{111} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{221} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) \\ d^2G_n = -\frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{212} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + A_{122} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta) \\ d^2G_p = -\frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (A_{122} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta). \end{cases}$$

En comparant avec les relations (I-4) qui donnent les coordonnées de $d^2\bar{F}$, on voit que *les composantes radiales seules sont égales et opposées* :

$$(I-11) \quad d^2G_r = -d^2F_r.$$

On voit également que l'on passe des coordonnées de d^2F à celles de $-d^2G$ en permutant simplement A_{122} et A_{212} .

On a donc, sous une forme analogue à celle des relations (I-7) :

$$\begin{cases} d^2G_r = -\frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} (A_{111} \cos \theta_2 dr - A_{221} r \sin \theta_2 d\theta_2) \\ d^2G_n = -\frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} (A_{212} \sin \theta_2 dr - A_{122} r \cos \theta_2 d\theta_2) \\ d^2G_p = -\frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} (-A_{122} r \sin \theta_2 \cos \theta_2 d\psi) \end{cases}$$

ce qui permet finalement de passer aux coordonnées en (X, Y, Z) à l'aide des relations de changement d'axes analogues à (I-8) :

$$(I-12) \quad \begin{cases} d^2G_x = -\frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} [(A_{111} - A_{212}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \psi dr \\ \quad + (A_{122} \cos^2 \theta_2 - A_{221} \sin^2 \theta_2) r \cos \psi d\theta_2 \\ \quad - A_{122} r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi d\psi] \\ d^2G_y = -\frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} [(A_{111} - A_{212}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi dr \\ \quad + (A_{122} \cos^2 \theta_2 - A_{221} \sin^2 \theta_2) r \sin \psi d\theta_2 \\ \quad + A_{122} r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \psi d\psi] \\ d^2G_z = -\frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} [(A_{111} \cos^2 \theta_2 + A_{212} \sin^2 \theta_2) dr \\ \quad - (A_{221} + A_{122}) r \sin \theta_2 \cos \theta_2 d\theta_2]. \end{cases}$$

CHAPITRE II

RECHERCHE DES DIFFÉRENTES LOIS ÉLÉMENTAIRES POSSIBLES

§ 1. Introduction

Parmi la quadruple infinité de lois élémentaires *logiquement* possibles, dont l'expression a été établie au chapitre précédent, nous nous proposons de rechercher celles qui sont *physiquement* possibles, c'est-à-dire celles dont l'application conduit à des résultats vérifiables expérimentalement.

Dans ce qui va suivre, nous appellerons « lois » l'ensemble des propositions permettant de définir les valeurs des quatre A_{ijk} inconnus, et « conditions » les propositions permettant de ne définir les valeurs que de certains de ces coefficients ou ne conduisant qu'à des relations entre ces coefficients.

§ 2. Loi de Laplace

La loi dite de LAPLACE s'exprime, en appelant d^2F' la valeur de la force élémentaire qui résulte de l'application de cette loi, par la relation :

$$d^2\overline{F'} = \frac{I_1 I_2}{r^2} \overline{ds_2} \wedge (\overline{u_r} \wedge \overline{ds_1}).$$

Les coordonnées de cette force sont⁽¹⁾, en utilisant les notations (I-1) :

$$(II-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2F'_r = + \frac{I_1 I_2}{r^2} \frac{ds_1 ds_2}{r^2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta \\ d^2F'_n = - \frac{I_1 I_2}{r^2} \frac{ds_1 ds_2}{r^2} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta \\ d^2F'_p = - \frac{I_1 I_2}{r^2} \frac{ds_1 ds_2}{r^2} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Les relations (II-1) sont quelquefois appelées formules de GRASSMANN, bien qu'elles se déduisent des lois de LAPLACE et de BIOT et SAVART. Elles avaient déjà été signalées (mais rejetées) par AMPÈRE. Voir à ce sujet ARZELIÈS (réf. 3).

Les A_{ijk} correspondant à la loi de LAPLACE ont donc pour valeur, en comparant avec les relations (I-4) :

$$(II-2) \quad A_{111} = 0 \quad A_{122} = 0 \quad A_{221} = +1 \quad A_{212} = -1.$$

En coordonnées (X, Y, Z), on obtient par les relations (I-9) :

$$(II-3) \quad \begin{cases} d^2 F'_x = \frac{I_1 I_2 ds_2}{r_2} (-r \cos \psi d\theta_2 + r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi d\psi) \\ d^2 F'_y = \frac{I_1 I_2 ds_2}{r_2} (-r \sin \psi d\theta_2 - r \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \psi d\psi) \\ d^2 F'_z = 0. \end{cases}$$

§ 3. Condition C/E

Nous appellerons ainsi, par abréviation, l'ensemble des conditions nécessaires pour qu'un circuit fermé (C) exerce sur un élément (E) la même force que celle que l'on obtient par application de la loi de LAPLACE.

Il est évident en effet que parmi la quadruple infinité de lois élémentaires satisfaisant aux relations (I-4), il en existe d'autres que celle de LAPLACE qui donnent le même résultat que celle-ci dans le calcul de l'action d'un circuit (C) sur un élément (E).

Mais alors que la force exercée par un circuit sur un circuit est accessible à l'expérience et que celle exercée par un élément sur un élément ne l'est pas (sinon cela permettrait d'établir d'emblée la loi élémentaire cherchée), qu'en est-il en ce qui concerne la force exercée par un circuit C sur un élément E? Décomposons cette force en deux composantes, l'une suivant l'élément de courant, l'autre perpendiculairement à cet élément.

a. La composante tangentielle semble difficilement accessible à l'expérience. Il se peut à priori qu'elle ne soit pas nulle, bien que pour un circuit fermé, l'ensemble de telles forces puisse finalement être nul, comme il semble en être ainsi en fait. Mais l'expérience elle-même donnerait des résultats discutables en dernière analyse, du fait que par « force sur un élément » nous entendons « résultante » des forces exercées tant sur les particules négatives que sur les particules positives constituant cet élément; or cette résultante apparaît effectivement dans le cas de la composante normale, mais pas d'une façon certaine dans le cas de la composante tangentielle du fait que les particules négatives peuvent glisser, plus ou moins librement, le long de l'élément considéré, d'où une difficulté d'interprétation des résultats expérimentaux. Nous verrons plus loin que cette difficulté se lève aisément dans le cas présent.

b. La composante normale par contre est facilement accessible à l'expérience car on peut concevoir un petit conducteur mobile dont les extrémités s'appuient et peuvent glisser sur des parties fixes, le tout formant un circuit fermé.

Finalement, la condition C/E devra être au moins telle que la seule composante normale de la force exercée par un circuit sur un élément soit la même

que celle qui résulte de l'application de la loi de LAPLACE, et qui est vérifiée par l'expérience.

Calculons maintenant cette condition.

Il est commode d'opérer avec les axes (X, Y, Z) [fig. 3]. La composante normale de la force sur l'élément (2) a pour coordonnées $\oint_1 d^2F_x$ et $\oint_1 d^2F_y$ où d^2F_x et d^2F_y sont données par les relations (I-9) et où l'intégration⁽¹⁾ est étendue à tout le circuit fermé parcouru par le courant I_1 . D'autre part, pour appliquer la loi de LAPLACE, on doit utiliser $d^2F'_x$ et $d^2F'_y$ données par les relations (II-3).

Les résultats devant être les mêmes dans les deux cas, il faut que l'on ait :

$$\begin{cases} \oint_1 d^2F_x = \oint_1 d^2F'_x \\ \oint_1 d^2F_y = \oint_1 d^2F'_y \end{cases}$$

Il suffit donc d'écrire que les expressions :

$$\begin{cases} d^2F_x - d^2F'_x \\ d^2F_y - d^2F'_y \end{cases}$$

sont des différentielles totales.

1° COMPOSANTE SUIVANT OX. — Les relations (I-9) et (II-3) donnent :

$$\left\{ \begin{aligned} d^2F_x - d^2F'_x &= \frac{I_1 I_2 ds_2}{r^2} [(A_{111} - A_{122}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \psi dr \\ &\quad + (A_{212} \cos^2 \theta_2 - A_{221} \sin^2 \theta_2 + 1) r \cos \psi d\theta_2 \\ &\quad + (-A_{212} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi - \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \psi) r d\psi]. \end{aligned} \right.$$

Cette expression étant de la forme $U dr + V d\theta_2 + W d\psi$ on doit avoir les trois égalités :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial W}{\partial r} \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial W}{\partial \theta_2}.$$

On obtient, à partir de la première égalité :

$$(A_{111} - A_{122}) (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \cos \psi = (-A_{212} \cos^2 \theta_2 + A_{221} \sin^2 \theta_2 - 1) \cos \psi$$

condition qui doit être remplie quelle que soit la valeur de θ_2 , ce qui donne en faisant successivement $\sin \theta_2 = 0$ puis $\cos \theta_2 = 0$:

$$A_{122} - A_{111} = 1 + A_{212} = A_{221} - 1$$

(1) L'intégration est légitime en admettant que l'action d'un élément quelconque d'un circuit sur un élément quelconque d'un second circuit ne dépend pas des autres éléments.

que nous écrivons :

$$(II-4) \quad \begin{cases} A_{212} = A_{221} - 2 \\ A_{122} = A_{111} + A_{221} - 1. \end{cases}$$

Il est notable que les deux autres égalités donnent les mêmes résultats.

2° COMPOSANTE SUIVANT OY. — En opérant de même avec $d^2F_y - d^2F'_y$, on obtient également les mêmes résultats. Cette composante n'apporte donc rien de nouveau, ce qui est normal puisque X et Y jouent le même rôle.

3° COMPOSANTE SUIVANT OZ. — Examinons ce qu'il en est de l'expression $d^2F_z - d^2F'_z$. Cette expression se réduit à d^2F_z puisque, par la loi de LAPLACE, $d^2F'_z$ est nul.

Se reportant aux relations (I-9), on voit aisément que pour que d^2F_z soit une différentielle totale, il faut que l'on ait :

$$(II-5) \quad A_{221} + A_{212} = 2(A_{122} - A_{111}).$$

Or cette relation se déduit des relations (II-4). Par conséquent, on peut dire que si la composante normale de la force exercée par un circuit fermé par un élément, calculée par application d'une loi *quelconque*, est la même que celle obtenue par application de la loi de LAPLACE, alors la composante tangentielle de cette force est nulle, comme avec la loi de LAPLACE. Ceci lève la difficulté soulevée plus haut relative à la mesure de la composante expérimentale tangentielle.

Il en résulte que la condition C/E est représentée par les relations (II-4), et l'adoption de cette condition permet de réduire à deux les quatre A_{ijk} inconnus.

§ 4. Condition E/C

Nous appellerons ainsi l'ensemble des conditions nécessaires pour qu'un élément (E) exerce sur un circuit fermé (C) la même force que celle que l'on obtient par application de la loi de LAPLACE.

Comme dans le cas précédent, nous utiliserons les axes (X, Y, Z) avec toujours l'élément (2) à l'origine. La force $d^2\vec{G}$ exercée par l'élément (2) sur l'élément (1) a ses coordonnées définies par les relations (I-12) dans le cas général. Dans le cas de la loi de LAPLACE, en donnant aux A_{ijk} les valeurs particulières (II-2), cette force prend la valeur $d^2\vec{G}$.

Toujours comme précédemment, nous écrivons que :

$$\begin{cases} d^2G_x - d^2G'_x \\ d^2G_y - d^2G'_y \\ d^2G_z - d^2G'_z \end{cases}$$

sont des différentielles totales. On obtient finalement :

$$(II-6) \quad \begin{cases} A_{122} = A_{221} - 1 \\ A_{212} = A_{111} + A_{221} - 2. \end{cases}$$

Ces relations, qui constituent la condition E/C, ne peuvent être vérifiées expérimentalement du fait de l'impossibilité d'isoler l'action d'un élément de courant sur un circuit, mais elles nous seront utiles par la suite.

§ 5. Condition C/C

Nous appellerons ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'un circuit fermé exerce sur un autre circuit fermé la même force que celle que l'on obtient par application de la loi de LAPLACE.

Cette condition, plus large que les précédentes, doit les englober. Comme les conditions C/E et E/C laissent deux coefficients A_{ijk} indéterminés, la condition C/C doit laisser trois coefficients A_{ijk} indéterminés.

Nous admettrons que cette condition s'exprime, comme toutes les conditions précédentes, par une relation linéaire entre les paramètres.

Or la condition C/E (relations II-4) s'écrit :

$$\begin{cases} A_{212} - A_{221} + 2 = 0 \\ A_{122} - A_{111} - A_{221} + 1 = 0. \end{cases}$$

Toutes les relations linéaires englobant C/E peuvent s'écrire :

$$\lambda (A_{212} - A_{221} + 2) + A_{122} - A_{111} - A_{221} + 1 = 0.$$

De même la condition E/C (relations II-6) s'écrit :

$$\begin{cases} A_{122} - A_{221} + 1 = 0 \\ A_{212} - A_{111} - A_{221} + 2 = 0. \end{cases}$$

Toutes les relations linéaires englobant E/C peuvent s'écrire :

$$A_{122} - A_{221} + 1 + \mu (A_{212} - A_{111} - A_{221} + 2) = 0.$$

D'où, en groupant les termes :

$$\begin{cases} \lambda A_{212} - (\lambda + 1) A_{221} + A_{122} - A_{111} + 2\lambda + 1 = 0. \\ \mu A_{212} - (\mu + 1) A_{221} + A_{122} - \mu A_{111} + 2\mu + 1 = 0. \end{cases}$$

Ces relations sont simultanément vérifiées si l'on a :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda + 1}{\mu + 1} = 1 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu} = \frac{2\lambda + 1}{2\mu + 1}$$

c'est-à-dire pour :

$$\lambda = 1 \quad \mu = 1$$

ce qui donne la relation cherchée :

$$(II-7) \quad A_{212} - 2A_{221} + A_{122} - A_{111} + 3 = 0.$$

Cette condition C/C, que nous considérerons comme expérimentalement vérifiée, permet ainsi de réduire à trois le nombre de paramètres inconnus et est applicable dans le cas où l'on estimerait insuffisamment fondée ⁽¹⁾ la condition C/E.

§ 6. Condition des forces parallèles

Posons *a priori* que la force $d^2\bar{F}$ exercée par l'élément (1) sur l'élément (2) est égale et de sens contraire à la force $d^2\bar{G}$ exercée par l'élément (2) sur l'élément (1). Les coordonnées de ces forces sont données par les relations (I-4) et (I-10).

D'après ces relations, on a toujours, même dans le cas général :

$$d^2F_r = -d^2G_r.$$

Si l'on veut également avoir :

$$\begin{cases} d^2F_n = -d^2G_n \\ d^2F_p = -d^2G_p \end{cases}$$

il faut que :

$$(II-8) \quad A_{212} = A_{122}.$$

Cette condition (II-8) sera désignée par l'expression « condition F. P. » (forces parallèles).

§ 7. Condition des forces centrales

Un courant électrique étant constitué par un ensemble de particules, les négatives mobiles, les autres positives fixes, si l'on admet que la force entre deux particules est dirigée suivant la ligne qui les joint, on est conduit à dire que dans cette hypothèse la force exercée par un élément de courant sur un autre élément de courant est également appliquée suivant la droite qui les joints.

Avec les axes (r, n, p) , on doit donc avoir :

$$\begin{cases} d^2F_n = 0 \\ d^2F_p = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Nous verrons par la suite (chap. III) que la condition C/E est elle aussi physiquement vérifiée, non pas directement par la mesure de l'influence d'un circuit sur un élément, mais parce qu'elle exprime la loi de l'induction relative aux circuits mobiles parcourus par des courants constants.

Les relations (I-4) donnent alors immédiatement :

$$(II-9) \quad \begin{cases} A_{212} = 0 \\ A_{122} = 0. \end{cases}$$

Cette condition, qui sera désignée par « condition F. C. » (forces centrales) est un cas particulier de la condition F. P.

Comme d'autre part, on a toujours (relation I-11) :

$$d^2 G_r = -d^2 F_r$$

il en résulte que, *dans le cas présent*, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction est vérifié.

§ 8. Loi d'Ampère

Cette loi a été formulée pour la première fois par AMPÈRE en 1823 (réf. I).

a. EXPRESSION DE LA LOI D'AMPÈRE. — Elle résulte de la réunion simultanée :

— de la condition C/E (et à ce titre, elle peut être utilisée en tant que loi élémentaire en remplacement de la loi de LAPLACE pour le calcul de l'interaction de deux circuits fermés fixes et à intensité constante).

— de la condition des forces centrales F. C.

Ces deux conditions, exprimées par les relations (II-4) et (II-9) donnent :

$$(II-10) \quad \begin{cases} A_{212} = 0 \\ A_{122} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_{221} = 2 \\ A_{111} = -1 \end{cases}$$

d'où finalement :

$$(II-11) \quad d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (-\cos \theta_1 \cos \theta_2 + 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta)$$

les deux autres composantes étant nulles.

b. ACTION D'UN ÉLÉMENT SUR UN CIRCUIT PAR LA LOI D'AMPÈRE. — En admettant la loi d'AMPÈRE, la force exercée par un circuit C sur un élément E est la même que celle qui résulte de l'application de la loi de LAPLACE.

Comme en outre les forces sont centrales, il y a dans ce cas égalité de l'action et de la réaction.

Donc, si l'on utilise la loi d'AMPÈRE, la force exercée par l'élément E sur le circuit C est égale et opposée à celle qu'exerce le circuit C sur l'élément E calculée par la loi de LAPLACE.

§ 9. Loi de Neumann élémentaire

a. EXPRESSION DE LA LOI. — Convenons maintenant de réunir simultanément :

- la condition E/C relations II-6);
- la condition F. C. (relations II-9).

On obtient :

$$(II-12) \quad \begin{cases} A_{212} = 0 \\ A_{122} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_{221} = 1 \\ A_{111} = 1. \end{cases}$$

En désignant par $d^2\overline{F''}$ la force dans ce cas, les relations (I-4) s'écrivent :

$$\begin{cases} d^2\overline{F''}_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) \\ d^2\overline{F''}_n = 0 \\ d^2\overline{F''}_p = 0. \end{cases}$$

Or on reconnaît dans l'expression de $d^2\overline{F''}_r$ le produit scalaire $\overline{ds_1} \cdot \overline{ds_2}$. Par conséquent, en appelant ε l'angle que font entre eux les deux éléments, on peut écrire :

$$(II-13) \quad d^2\overline{F''}_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \cos \varepsilon = -d^2\overline{G''}_r.$$

Cette loi élémentaire, que nous conviendrons à cause de sa forme d'appeler « loi de NEUMANN élémentaire » peut au même titre que la loi d'AMPÈRE ou la loi de LAPLACE servir au calcul de l'interaction de deux circuits fermés, comme le montre l'exemple suivant :

b. EXTENSION A LA FORMULE DE NEUMANN. — La formule classique de NEUMANN donne la composante suivant une direction quelconque x , de la force qui s'exerce entre deux circuits fermés. Elle s'exprime par :

$$(II-14) \quad F_x = I_1 I_2 \frac{\partial}{\partial x} \int_1 \int_2 \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2.$$

La loi élémentaire (II-13) établie ci-dessus, permet de son côté d'écrire :

$$(II-15) \quad F_x = I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{x}{r^3} \cos \varepsilon ds_1 ds_2.$$

Il se peut que, dans certains cas particuliers, les calculs à partir de la relation (II-15) soient plus simples qu'à partir de la relation classique (II-14).

§ 10. Positions logiques des différentes conditions

Les différentes lois et conditions qui viennent d'être envisagées ne sont pas toutes compatibles entre elles et le schéma de la figure 4 montre leur situation logique réciproque, telle qu'elle résulte de l'examen des relations qui les définissent, et que nous rappelons :

Condition C/C, relation (II-7);

Condition C/E, relation (II-4);

Condition E/C, relation (II-6);

Condition F. P., relation (II-8);

Condition F. C., relation (II-9);

Loi de LAPLACE (L), relation (II-2);

Loi d'AMPÈRE (A), relation (II-10);

Loi de NEUMANN élémentaire (N), relation (II-12).

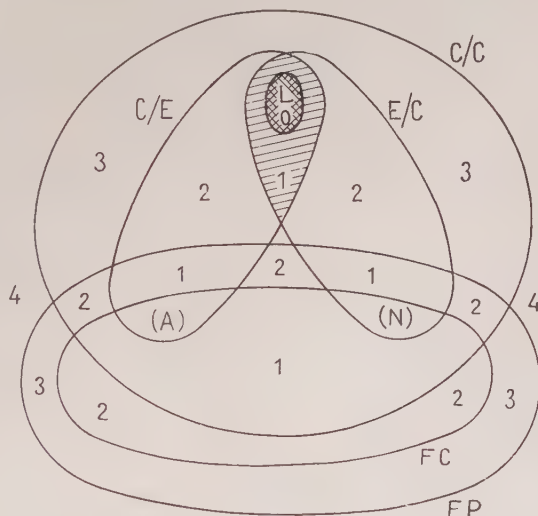


Fig. 4

Le domaine représentatif de C/C englobe celui de C/E et celui de E/C. D'autre part, ces deux derniers ont un domaine commun dans lequel il reste un paramètre, car on a alors, d'après (II-4) et (II-6) :

$$(II-16) \quad \begin{cases} A_{111} = 0 \\ A_{221} = A_{212} + 2 = A_{122} + 1. \end{cases}$$

La loi de LAPLACE (qui pourrait se désigner par E/E) n'en est qu'un cas particulier. Nous verrons d'ailleurs au chapitre V que ce domaine satisfait à une nouvelle condition, la « condition de relativité restreinte ».

Le domaine représentatif de la condition F. C. a une zone commune avec la condition C/C et, dans cette zone, a d'une part une zone commune (A) avec C/E et qui est la loi d'AMPÈRE, et d'autre part une zone commune (N) avec E/C et qui est la loi de NEUMANN élémentaire. Ce domaine F. C. est évidemment à l'intérieur du domaine F. P.

Les chiffres indiqués sur la figure, indiquent le nombre de paramètres libres dans chaque zone. Ce chiffre varie d'une unité à chaque traversée de frontière de zone.

§ 11. Conclusions

Ceci étant, le problème est le suivant. La condition C/C étant considérée comme une donnée expérimentale acquise, mais la condition C/E n'étant pas encore considérée comme suffisamment fondée par des mesures directes (elle le sera par la suite pour d'autres raisons), quelles conditions choisir pour pouvoir déterminer complètement une loi élémentaire?

Ces conditions seront constituées par un ensemble (Λ) de lois expérimentales qui sont les lois définissant l'influence, sur un circuit fermé fixe :

— d'un courant fermé fixe et d'intensité constante (condition déjà admise puisqu'il s'agit de la condition C/C);

— d'un courant fermé d'intensité constante mais mobile;

— d'un courant fixe mais d'intensité variable.

Pour expliciter ces conditions, il est nécessaire d'utiliser maintenant l'interprétation particulière des courants.

Un courant électrique sera considéré comme un ensemble de particules, les unes mobiles chargées négativement, les autres fixes chargées positivement, et en nombre égal aux précédentes de telle sorte que l'ensemble soit électriquement neutre. Il n'y a pas lieu de considérer les particules négatives fixes et le nombre correspondant de particules positives fixes, dont les effets s'annulent simultanément.

Un élément de courant sera donc défini non plus par les quantités I et $\overline{ds}$ utilisées jusqu'à présent, mais par la charge $-|q|$ des particules négatives mobiles contenues dans l'élément ds , et par leur vitesse $\bar{v}$ (en admettant pour l'instant qu'elles aient toutes la même vitesse, ce point de vue devant être justifié par la suite).

Nous conviendrons d'évaluer les intensités en unités électro-magnétiques C.G.S. et les charges en unités électro-statiques C.G.S.

Dans ces conditions, on aura, comme conséquence de la définition :

$$I ds = \frac{q}{c} v$$

ou, en faisant intervenir la densité linéaire $\rho = \frac{q}{ds}$:

$$I = \frac{\rho}{c} v.$$

A toute loi d'interaction entre les particules, ou « loi particulière », correspondra une loi entre éléments de courants ou « loi élémentaire ». Nous allons donc rechercher les lois particulières qui conduisent à des lois élémentaires satisfaisant aux conditions expérimentales (Λ) indiquées ci-dessus.

D'autre part, les expressions de l'interaction des courants et des particules ne peuvent être formulées que si l'on se fixe au préalable un cadre spatio-temporel, c'est-à-dire qu'il faut préciser si ce cadre est non relativiste ou relativiste ⁽¹⁾.

On pourrait évidemment se contenter d'une étude purement relativiste. Il a paru cependant intéressant de pousser l'étude dans sa généralité et d'examiner aussi les conséquences d'une attitude non-relativiste.

Par conséquent, dans chacune de ces deux grandes voies, la voie non-relativiste et la voie relativiste, nous allons établir les relations qui expriment les conditions expérimentales choisies, afin d'en déduire la loi élémentaire et la loi particulière qu'il y a lieu d'adopter.

⁽¹⁾ Tous les calculs qui ont fait l'objet des chapitres I et II sont valables aussi bien du point de vue non relativiste que du point de vue relativiste.

Ceux des chapitres III et IV sont non-relativistes.

Ceux des chapitres V et suivants sont entièrement relativistes.

CHAPITRE III

LOI GÉNÉRALE NON RELATIVISTE D'INTERACTION
ENTRE PARTICULES

§ 1. Retour sur la notion de force

Désignons par $\vec{f}$ la force exercée par une particule (1) de charge q_1 , sur une particule (2) de charge q_2 .

Si les deux particules sont fixes, l'expérience montre que la loi de COULOMB s'applique. En utilisant les axes (r, n, p) avec la particule (2) à l'origine et la particule (1) sur l'axe r , on a donc :

$$\vec{f} = -\vec{u}_r \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Mais alors qu'il n'y a pas de difficulté pour définir la force qui s'exerce entre particules fixes, il n'en est pas de même lorsque les particules sont en mouvement relatif.

Il faut bien noter, en effet, que la notion de force *sur une particule en mouvement* reste en définitive assez arbitraire. Si l'on définit la force comme le produit de la masse par l'accélération, cette dernière grandeur est bien mesurable, mais il restera à définir ce qu'on entend par masse d'une particule en mouvement. Or cette définition a un certain degré d'arbitraire : par exemple on peut convenir *a priori* que la masse est invariante, et définir la force comme un vecteur proportionnel au vecteur accélération γ , lequel est en effet accessible à l'expérience. Mais cette convention n'a pas un caractère impératif : on pourrait tout aussi bien introduire au contraire la notion de masse variable avec la vitesse, par exemple la notion de masse transversale et de masse longitudinale, même dans le cadre de la non-relativité dans lequel nous nous sommes placés. Nous reviendrons plus en détail sur ce point au chapitre VIII.

Considérons donc la masse comme invariante par convention et définissons la force sur une particule en mouvement par $\vec{f} = m\vec{\gamma}$.

Dans ces conditions, puisque l'accélération est invariante dans le cadre galiléen où nous sommes placés actuellement, la force est également invariante.

De plus, il est facile de voir que si l'on considère une particule fixe et une particule mobile ⁽¹⁾ en interaction, les forces qui s'exercent sur chacune de ces particules sont *parallèles, égales et de sens contraire* mais non obligatoirement dirigées selon la ligne qui joint les deux particules. Il suffit pour cela de passer à un système de référence lié à la particule mobile et de noter que cela revient à intervertir les deux particules. Le détail de la démonstration sera donné au chapitre VIII et repose sur le postulat qu'il n'y a pas de système non accéléré privilégié.

Si l'on veut éviter de soulever la notion de masse d'une particule en mouvement, on peut donc convenir de définir la force sur une particule en mouvement comme égale à la force que cette dernière exercerait sur une particule fixe qui, à son tour, exercerait sur la particule en mouvement une force qui équilibrerait celle à laquelle cette dernière particule est soumise (lui donnant ainsi finalement un mouvement rectiligne et uniforme).

Cette convention permet en même temps d'obtenir un procédé de mesure de la force sur une particule en mouvement, puisqu'on est ramené à la mesure de la force exercée sur une particule fixe et que cette mesure est connue (on équilibre cette force à l'aide d'un dynamomètre étalonné).

Le but des considérations qui précèdent est le suivant.

En pratique, les forces ne sont mesurables statiquement qu'en tant qu'elles s'exercent sur des particules positives fixes. Par conséquent, la mesure des forces qui s'exercent sur un élément de courant (formé de particules négatives et de particules positives) portera sur :

- les forces exercées *directement* sur les particules positives;
- les forces exercées sur les particules positives *par l'intermédiaire* des particules négatives.

En effet, il peut bien s'exercer directement des forces sur les particules négatives, mais celles-ci sont, en général, retenues au voisinage des particules positives de telle sorte qu'en régime permanent les particules négatives sont soumises à des forces de résultante nulle. Simultanément, les particules négatives exercent alors sur les particules positives des forces qui s'ajoutent à celles auxquelles ces particules sont déjà soumises directement.

Finalement, c'est la résultante des forces sur les particules positives seules qui est mesurée expérimentalement.

Le calcul de cette résultante est simple avec la convention choisie plus haut, car il suffit alors de dire que cette résultante est égale à la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur toutes les particules, positives ou négatives, fixes ou mobiles ⁽²⁾.

(1) Par « particule mobile », nous entendons seulement « particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme ».

(2) Naturellement, dans le cas où l'on admettrait une autre convention (c'est-à-dire force non invariante), le résultat final du calcul de la force sur l'élément de courant (qui est au repos) serait finalement le même. Mais la valeur de cette force ne s'obtiendrait pas en ajoutant purement et simplement les forces qui s'exercent sur les particules positives et sur les particules négatives du courant. Nous avons insisté sur ce point parce que les considérations développées ici nous seront utiles par la suite.

§ 2. Forme générale de la loi particulière

La force qui s'exerce sur chacune des deux particules mobiles reste donc la même, d'après ce qui précède, si l'on se rapporte à un système de référence lié à l'une ou l'autre des particules. Elle ne dépend *que de la vitesse relative*, c'est-à-dire de la grandeur v de cette dernière et de son orientation θ par rapport à la ligne des centres. Elle doit se réduire à la force de COULOMB pour $v = 0$.

Nous poserons donc :

$$(III-1) \quad \bar{f} = -\bar{u}_r \frac{q_1 q_2}{r^2} + \delta^2 \bar{f}$$

en appelant $\delta^2 \bar{f}$ la force supplémentaire inconnue qui s'ajoute à celle de COULOMB dans le cas de mouvement relatif, et nous admettrons que $\delta^2 \bar{f}$ a la forme :

$$\delta^2 \bar{f} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \bar{\varphi} \left(\frac{v}{c}, \theta \right)$$

où c est une constante ayant les dimensions d'une vitesse.

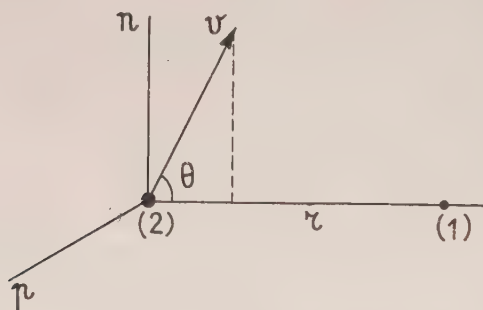


Fig. 5

Il s'agit de déterminer la fonction $\bar{\varphi}$, dont on sait seulement qu'elle s'annule pour $v = 0$ et que :

$$\bar{\varphi} \left(\frac{v}{c}, \theta \right) = \bar{\varphi} \left(\frac{v}{c}, \theta + \pi \right)$$

Pour préciser davantage la forme de cette fonction, nous choisirons des axes (r, n, p) provisoires, tels que la particule (1) soit fixe sur l'axe r , que la particule (2) se trouve à l'origine et que sa vitesse soit dans le plan (r, n) comme indiqué fig. 5.

Avec ce système d'axes, la force supplémentaire exercée par (1) sur (2) a pour expression générale :

$$\delta^2 \bar{f} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[\bar{u}_r \bar{\varphi}_r \left(\frac{v}{c}, \theta \right) + \bar{u}_n \bar{\varphi}_n \left(\frac{v}{c}, \theta \right) + \bar{u}_p \bar{\varphi}_p \left(\frac{v}{c}, \theta \right) \right]$$

car elle n'a aucune raison *a priori* d'être centrale, contrairement à la force de COULOMB. Toutefois, en raison du postulat de symétrie, on peut écrire :

$$\Phi_p\left(\frac{v}{c}, \theta\right) = 0,$$

d'où :

$$(III-2) \quad \delta^2 \bar{f} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[\bar{u}_r \Phi_r\left(\frac{v}{c}, \theta\right) + \bar{u}_n \Phi_n\left(\frac{v}{c}, \theta\right) \right].$$

On est finalement amené à déterminer les fonctions Φ_r et Φ_n par la condition qu'on puisse en déduire la loi d'interaction entre élément de courants sous sa forme la plus générale (I-4).

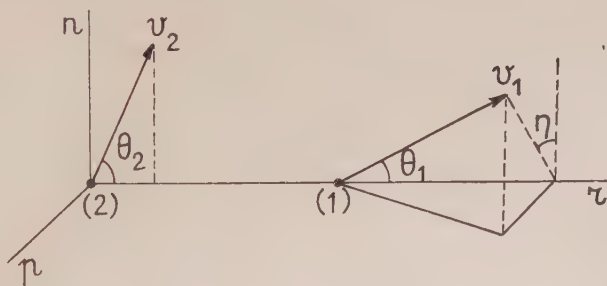


Fig. 6

Soient donc deux éléments de courant (1) et (2) ayant par rapport aux axes (r, n, p) la même disposition que celle qui a été adoptée aux précédents chapitres (fig. 6). Les charges mobiles $(1)_-$ et $(2)_-$, dans chacun des éléments ont pour valeur $-|q_1|$ et $-|q_2|$, et les charges positives $(1)_+$ et $(2)_+$, fixes, $+|q_1|$ et $+|q_2|$. Évaluons les forces supplémentaires entre ces charges telles qu'elles résultent des relations (III-2) :

- a. Pas de force supplémentaire entre $(1)_+$ et $(2)_+$ qui sont fixes;
- b. Force supplémentaire exercée par $(1)_+$ sur $(2)_-$:

$$\delta^2 \bar{f}_+ = -\frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \left[\bar{u}_r \Phi_r\left(\frac{v_2}{c}, \theta_2\right) + \bar{u}_n \Phi_n\left(\frac{v_2}{c}, \theta_2\right) \right];$$

- c. Force supplémentaire exercée par $(1)_-$ sur $(2)_+$: cette force est la même que si (1) était fixe et si $(2)_+$ était animé d'une vitesse $-v_1$, d'où :

$$\delta^2 \bar{f}_+ = +\frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \left[\bar{u}_r \Phi_r\left(-\frac{v_1}{c}, \theta_1\right) + \bar{u}_n \Phi_n\left(-\frac{v_1}{c}, \theta_1\right) \cos \eta + \bar{u}_p \Phi_n\left(-\frac{v_1}{c}, \theta_1\right) \sin \eta \right];$$

- d. Force exercée par (1) sur (2) : cette force est la même que si $(1)_-$ était fixe et si $(2)_-$ était animé d'une vitesse $v_3 = v_2 - v_1$, d'où :

$$\delta^2 \bar{f} = -\frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \left[\bar{u}_r \Phi_r\left(\frac{v_3}{c}, \theta_3\right) + \bar{u}_n \Phi_n\left(\frac{v_3}{c}, \theta_3\right) \cos \eta_3 + \bar{u}_p \Phi_n\left(\frac{v_3}{c}, \theta_3\right) \sin \eta_3 \right]$$

avec :

$$(III-3) \quad \begin{cases} v_3 \cos \theta_3 = v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1 \\ v_3 \sin \theta_3 \cos \eta_3 = v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1 \cos \eta \\ v_3 \sin \theta_3 \sin \eta_3 = -v_1 \sin \theta_1 \sin \eta. \end{cases}$$

Finalement, en ajoutant ces trois forces partielles (ce que l'on a le droit de faire, comme il a été dit plus haut, en vertu de la définition adoptée pour la force), on obtient :

$$(III-4) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 \bar{F} = & + \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \left\{ u_r \left[\varphi_r \left(\frac{v_2}{c}, \theta_2 \right) + \varphi_r \left(-\frac{v_1}{c}, \theta_1 \right) - \varphi_r \left(\frac{v_3}{c}, \theta_3 \right) \right] \right. \\ & + \bar{u}_n \left[\varphi_n \left(\frac{v_2}{c}, \theta_2 \right) + \varphi_n \left(-\frac{v_1}{c}, \theta_1 \right) \cos \eta - \varphi_n \left(-\frac{v_3}{c}, \theta_3 \right) \cos \eta_3 \right] \\ & \left. + \bar{u}_p \left[\varphi_n \left(-\frac{v_1}{c}, \theta_1 \right) \sin \eta - \varphi_n \left(\frac{v_3}{c}, \theta_3 \right) \sin \eta_3 \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette relation doit être identique aux relations (I-4) qui définissent la force entre éléments.

La comparaison entre les relations (I-4) et (III-4) montre :

— que les variables v et θ n'interviennent dans les fonctions φ_r et φ_n que par $v \sin \theta$ et $v \cos \theta$;

— que ces nouvelles variables n'interviennent pas sous un degré supérieur à deux, d'où pour φ_r et φ_n des expressions de la forme :

$$\varphi \left(\frac{v}{c}, \theta \right) = \alpha \frac{v}{c} \sin \theta + \beta \frac{v}{c} \cos \theta + \gamma \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta + \delta \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta + \varepsilon \frac{v^2}{c^2} \sin \theta \cos \theta.$$

D'autre part comme il est évident (principe de symétrie) que φ_r est indépendant du signe de θ et qu'au contraire φ_n change de signe avec θ , on peut poser finalement :

$$(III-5) \quad \begin{cases} \varphi_r \left(\frac{v}{c}, \theta \right) = A \frac{v}{c} \cos \theta + B \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta + C \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \\ \varphi_n \left(\frac{v}{c}, \theta \right) = D \frac{v}{c} \sin \theta + E \frac{v^2}{c^2} \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

1° FORME GÉNÉRALE DE LA LOI PARTICULAIRE ENTRE UNE PARTICULE FIXE ET UNE PARTICULE MOBILE. — Dans ces conditions, la loi particulière relative à la force qui s'exerce entre une particule fixe et une particule mobile sera de la forme, d'après (III-2) et (III-5) :

$$(III-6) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{f} = & - \frac{q_1 q_2}{c^2 r^2} \left[u_r (1 + A c v \cos \theta + B v^2 \sin^2 \theta + C v^2 \cos^2 \theta) \right. \\ & \left. + \bar{u}_n (D c v \sin \theta + E v^2 \sin \theta \cos \theta) \right]. \end{aligned} \right.$$

2° FORME GÉNÉRALE DE LA LOI PARTICULAIRE ENTRE DEUX PARTICULES MOBILES. — La force qui s'exerce dans le cas général entre deux particules en mouvement, en disposant les axes comme indiqué sur la figure 6, s'écrit à partir de la relation précédente en donnant à v et θ les valeurs v_3 et θ_3 définies par les relations (III-3).

On obtient :

$$(III-7) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{f} = & -\frac{q_1 q_2}{c^2 r^2} \\ & \left\{ \overline{u_r} [1 + A c (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) \right. \\ & \quad + v_2^2 (B \sin^2 \theta_2 + C \sin^2 \theta_2) + v_1^2 (B \sin^2 \theta_1 + C \cos^2 \theta_1) \\ & \quad \left. - 2 v_1 v_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + B \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta)] \right. \\ & + \overline{u_n} [D c (v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1 \cos \eta) \\ & \quad + E v_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + E v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \eta \\ & \quad \left. - E v_1 v_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta)] \right. \\ & \left. + \overline{u_p} [-D c v_1 \sin \theta_1 \sin \eta + E v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \eta \right. \\ & \quad \left. - E v_1 v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette expression montre qu'on ne peut pas convenir que la charge varie avec la vitesse. Si l'expression de $\bar{f}$ avait la forme :

$$\bar{f} = -\frac{q_1 q_2}{c^2 r^2} \varphi(v_1, \theta_1, \eta) \times \varphi(v_1, \theta_2)$$

on pourrait définir la charge d'une particule en mouvement comme ayant la valeur $q \times \varphi$ et appliquer à cette charge la loi de COULOMB. Mais ce n'est pas le cas. Aussi peut-on poser, *par définition*, que la charge est invariable, mais que la loi de COULOMB ne s'applique qu'entre particules en repos relatif.

§ 3. Forme générale de la loi élémentaire

En portant les expressions (III-5) dans les relations (III-4), et en tenant compte des relations (III-3), on obtient finalement pour les trois composantes de $d^2 \bar{F}$:

$$(III-8) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 F_r = & \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (2C \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 2B \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) \\ d^2 F_n = & \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (E \cos \theta_1 \sin \theta_2 + E \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta) \\ d^2 F_p = & \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} E \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta. \end{aligned} \right.$$

On retrouve bien la forme générale des relations (I-4), ce qui montre que l'interprétation particulière des courants implique les postulats (1) et (2) que,

l'on peut donc abandonner en tant que tels, et l'on a :

$$(III-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{111} = 2C \\ A_{221} = 2B \\ A_{122} = E \\ A_{212} = E. \end{array} \right.$$

Les deux dernières des identités donnent :

$$A_{122} = A_{212}$$

qui n'est autre que la relation (II-8) et caractérise la condition F.P. Quelle que soit d'ailleurs la définition choisie pour la force (ou la masse) entre particules mobiles, on retrouverait cette condition pour la force entre éléments puisque ceux-ci sont fixes. *Cette condition résulte seulement du fait que le cadre spatio-temporel est ici galiléen.*

Finalement, on voit que l'utilisation du cadre galiléen réduit le nombre des coefficients inconnus à 3 pour la loi élémentaire, et à 5 pour la loi particulière. Il y a donc lieu d'envisager de nouvelles conditions afin de réduire ces nombres.

Dans ce qui va suivre, par commodité d'écriture, nous utiliserons dorénavant les coefficients B, C, E, au lieu de A_{111} , A_{221} , A_{122} et A_{212} .

Pour éviter toute confusion, réécrivons avec les nouvelles notations (III-9), ce qui tient compte de la condition F.P., les conditions examinées au chapitre précédent :

$$(III-10) \quad \text{conditions C/C} \quad 2B + C - E = + \frac{3}{2}$$

$$(III-11) \quad \text{conditions C/E} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2C = -1 \\ E = 2B - 2 \end{array} \right.$$

$$(III-12) \quad \text{conditions E/C} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2C = +1 \\ E = 2B - 1. \end{array} \right.$$

Si l'on impose la condition F. C. qui est :

$$E = 0$$

on obtient, avec la condition C/E :

$$(III-11 a) \quad \text{Loi d'AMPÈRE :} \quad 2C = -1 \quad B = +1$$

et, avec la condition E/C :

$$(III-12 b) \quad \text{Loi de NEUMANN :} \quad 2C = +1 \quad B = + \frac{1}{2}$$

Quant à la loi de LAPLACE, elle ne peut être retrouvée ici puisqu'elle ne remplit pas la condition F. P. rencontrée dès le début de ce chapitre : sur le schéma de la fig. 4, sa zone représentative se trouve en dehors de la zone F. P. La loi de LAPLACE est donc incompatible avec le cadre galiléen.

§ 4. Action d'un élément de courant sur une particule

Les relations (III-8) définissent la force entre éléments de courant et la relation (III-7) la force entre particules mobiles.

Établissons maintenant l'expression de la force exercée par un élément de courant, placée avec les axes (r, n, p) dans la position (I) habituelle, sur une particule q_2 placée à l'origine et animée d'une vitesse v_2 dans le plan (r, n) .

La force exercée par les particules négatives de l'élément de courant est donnée par la relation (III-7).

La force exercée par les particules positives de l'élément de courant est donnée par la même expression dans laquelle on fait $v_1 = 0$.

La force totale est donc :

$$3) \quad \delta^2 f = - \frac{|q_1| |q_2|}{c^2 r^2} \left\{ \begin{aligned} & \overline{u_r} [A c v_1 \cos \theta_1 - v_1^2 (B \sin^2 \theta_1 + C \cos^2 \theta_1) + 2 v_1 v_2 (C \cos \theta_1 \cos \theta_2 + B \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta)] \\ & + \overline{u_n} [D c v_1 \sin \theta_1 \cos \eta - E v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \eta + E v_1 v_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta)] \\ & + \overline{u_p} [D c v_1 \sin \theta_1 \sin \eta - E v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \eta + E v_1 v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta] \end{aligned} \right\}$$

_____ Groupe (I) _____
_____ Groupe (II) _____

où l'on peut faire apparaître l'intensité I_1 par

$$I_1 ds_1 = \frac{-|q_1| v_1}{c}.$$

L'ensemble des termes du groupe (I) représente la force exercée par un élément de courant sur une particule *fixe*.

L'ensemble des termes du groupe (II) représente le *supplément de force* qui apparaît lorsque la particule a une vitesse v_2 .

a. L'existence des termes (I) montre qu'une particule placée au voisinage d'un élément de courant subit une force de la part de cet élément (il se peut d'ailleurs, comme nous le verrons plus loin, que si l'on considère l'influence de tous les éléments d'un circuit fermé, la force résultante soit nulle).

b. Par contre, le supplément de force représenté par les termes (II) est seul à se manifester lorsque la particule en mouvement fait partie d'un élément de courant. Dans ce cas en effet, la force partielle sur la particule en mouvement représentée par les termes (I), est équilibrée par la force égale et opposée qui s'exerce sur les particules fixes de signe contraire. C'est pourquoi d'ailleurs les termes (II) de la relation (III-13) sont identiques à ceux des relations (III-8) définissant la loi élémentaire.

§ 5. Action d'un élément de courant sur la matière

Loi de l'induction

La matière sera considérée comme constituée par un ensemble de particules positives et de particules négatives en nombre égal.

Toujours avec la même disposition de figure, considérons placé à l'origine un groupe formé d'une particule positive et d'une particule négative, et un élément de courant ds_1 dans la position (I) sur l'axe r . Faisons abstraction de la force représentée par les termes du groupe (I), par exemple en supposant que l'existence de cette force a agi sur les particules négatives en les répartissant dans le sein de la matière suivant une distribution qui aurait réalisé un état d'équilibre électrostatique.

Dans ces conditions, les deux particules (positive et négative) représentant la matière d'un conducteur sont au repos à l'origine.

Déplaçons-les à une vitesse v_2 dans la direction θ_2 . Il apparaîtra deux forces égales et opposées, dont la valeur est représentée par les termes du groupe (II), qui tendront à séparer les particules. Si la particule positive est maintenue en mouvement rectiligne et uniforme et si la particule négative est libre, cette dernière se déplacera en dehors de la trajectoire rectiligne suivie par l'autre particule, et dans la mesure où ses degrés de liberté le lui permettront (par exemple si elle est assujettie à rester sur un corps conducteur). Ce sera la manifestation du courant induit.

Montrons que la loi classique de l'induction

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

(où e est une différence de potentiel et Φ un flux de champ magnétique) découle obligatoirement de la loi de LAPLACE.

Soit dl , de coordonnées dr , dn , dp , un élément de droite le long duquel la particule négative peut se déplacer (fig. 7).

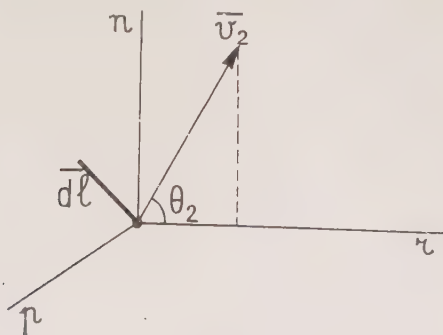


Fig. 7

Le flux balayé par cet élément $\overline{dl}$ a pour valeur :

$$d\Phi = (\overline{dl} \wedge \overline{v_2} dt) \cdot \overline{\mathcal{H}}$$

avec :

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{I_1}{cr^2} \overline{ds_1} \wedge \overline{u_r}.$$

Le tableau des coordonnées étant le suivant :

dl	$\overline{v_2}$	$\overline{ds_1}$	$\overline{u_r}$
dr	$v_2 \cos \theta_2$	$ds_1 \cos \theta_1$	1
dn	$v_2 \sin \theta_2$	$ds_1 \sin \theta_1 \cos \eta$	0
dp	0	$ds_1 \sin \theta_1 \sin \eta$	0

on obtient facilement :

$$(III-14) \quad \left\{ \begin{aligned} e = - \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{I_1 v_2 ds_1}{cr^2} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta dr \\ &\quad - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta dn - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta dp). \end{aligned} \right.$$

Soit $\delta^2 f_{11}$ la force représentée par les termes du groupe II, c'est-à-dire celle qui apparaît du fait de la vitesse $\overline{v_2}$. On a, par définition du potentiel, lorsque la particule q_2 s'est déplacée de la longueur dl sous l'influence de cette force :

$$- \frac{q_2}{c} e = \delta^2 \overline{j_{11}} \cdot \overline{dl}.$$

Or, d'une part, la relation (III-14) donne, en remplaçant $I_1 ds_1$ par $\frac{q_1}{c} v_1$:

$$(III-15) \quad \left\{ \begin{aligned} - \frac{q_2}{c} e &= - \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{c^2 r^2} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta dr \\ &\quad - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta dn - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta dp). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, d'après ce qui a été dit en b au paragraphe précédent, la force $\delta^2 f_{11}$ a, dans le cas le plus général, l'expression suivante, qui pourrait être obtenue par un calcul analogue à celui qui a conduit à la relation (III-13), mais sans imposer la condition F. P. (donc même si l'on n'adopte pas un cadre galiléen) :

$$\left(\delta^2 f_{11} = - \frac{|q_1| q_2}{c^2 r^2} v_1 v_2 \right. \\ \left. \begin{aligned} &[\overline{u_r} (A_{111} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{221} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) \\ &\quad + \overline{u_n} (A_{122} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta) \\ &\quad + \overline{u_p} (A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta)] \end{aligned} \right)$$

d'où :

$$(III-16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_{II} \cdot \overline{dl} &= \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{c^2 r^2} \\ &[(A_{111} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + A_{221} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) dr \\ &+ (A_{122} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta) dn \\ &+ (A_{212} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta) dp]. \end{aligned} \right.$$

La comparaison de (III-15) et de (III-16) donne immédiatement :

$$A_{111} = 0 \quad A_{221} = +1 \quad A_{122} = 0 \quad A_{212} = -1$$

qui caractérise la loi de LAPLACE (relations II-2).

On en déduit qu'accepter la loi d'induction $e = - \frac{d\Phi}{dt}$ comme expérimentale à partir d'un élément, revient à accepter la loi de LAPLACE entre éléments. Mais comme cette loi d'induction n'a été établie expérimentalement qu'à partir de champs magnétiques créés par des circuits fermés, ce n'est finalement pas la loi de LAPLACE (qui aurait pour symbole E/E) qui est obligatoire, mais c'est la condition C/E.

Il est d'ailleurs assez évident que la loi définissant l'influence d'un courant fermé sur un élément de courant fixe, et celle définissant l'influence d'un courant fermé sur un élément de conducteur mobile soient les mêmes, puisque dans les deux cas il s'agit de la force exercée par un courant fermé sur une particule mobile du fait de la vitesse de cette dernière (c'est de cette influence que l'on déduit la notion de champ magnétique d'un courant).

L'analyse de l'action mutuelle des courants à l'aide de la loi particulière permet donc, en établissant la condition C/E, d'éliminer certaines des hypothèses envisagées précédemment qui, cependant, rentraient dans le cadre de la condition C/C. Par exemple, la loi de NEUMANN élémentaire est facilement éliminée par la considération de l'induction et on peut le montrer directement : considérons en effet deux circuits plans fermés de forme quelconque, placés dans des plans parallèles, et dont l'un est parcouru par un courant. Déplaçons ces circuits l'un par rapport à l'autre avec une vitesse relative perpendiculaire à ces plans. Les vitesses v_1 et v_2 envisagées ci-dessus sont alors perpendiculaires entre-elles; la force δf_{II} serait alors nulle (voir relation II-13). Par conséquent, si l'on admettait les conditions E/C et F. C., il n'y aurait pas de courant induit, ce qui est contraire à l'expérience ⁽¹⁾.

Finalement on peut dire que la condition C/E est valable dans la mesure où la loi de l'induction est vérifiée pour des éléments de circuits se déplaçant par rapport à des courants fermés.

Cette condition se traduit par les relations (III-II)

$$\left\{ \begin{aligned} 2C &= -1 \\ E &= 2B - 2. \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Ou encore, sur le schéma de la figure 4, la zone commune à E/C et à F/C est en dehors de la zone C/E.

Il ne reste dont, finalement en utilisant cette première loi de l'induction, qu'un seul coefficient inconnu (E par exemple) dans les termes du second degré figurant dans les expressions des forces entre particules ou entre éléments :

— force exercée par la particule fixe sur la particule mobile ou loi particulière, d'après la relation (III-6)

$$(III-17) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{c^2 r^2} \left(1 + A v \cos \theta + \frac{E+2}{2} v^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \right) \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{c^2 c^2} (D v \sin \theta + E v^2 \sin \theta \cos \theta); \end{cases}$$

— force exercée par l'élément (1) sur l'élément (2) ou loi élémentaire, d'après la relation (III-8) :

$$(III-18) \quad \begin{cases} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [-\cos \theta_1 \cos \theta_2 + (E+2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [E \cos \theta_1 \sin \theta_2 + E \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [E \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta]. \end{cases}$$

Enfin rappelons que la loi élémentaire d'AMPÈRE correspond au cas particulier $E = 0$. On obtient alors pour la loi particulière une loi établie par GAUSS ⁽¹⁾ (qui négligeait les termes du 1^{er} degré en v).

§ 6. Condition sur les termes du premier ordre

Examinons maintenant particulièrement la force partielle entre particules qui est représentée par les termes du premier ordre en v , c'est-à-dire ceux qui contiennent les coefficients A et D .

Dans le cas de l'action d'un élément de courant (1) sur une particule q_2 , la relation (III-13) montre que cette force partielle $\delta^2 \bar{f}_1$ ne dépend pas de la vitesse v_2 de la particule. On peut écrire en effet :

$$\delta^2 \bar{f}_1 = -\frac{|q_1| q_2}{c r^2} (\bar{u}_r A v \cos \theta_1 + \bar{u}_n D v_1 \sin \theta_1 \cos \eta + \bar{u}_p D v_1 \sin \theta_1 \sin \eta).$$

(1) La formule en question, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{c^2 r^2} \left(1 + v^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \right) \\ f_n = 0 \end{cases}$$

a été établie par GAUSS en 1835, mais il ne l'a pas publiée. Elle fut retrouvée dans ses manuscrits après sa mort et publiée en 1867 (d'après ARZELIES, réf. 3, p. 195).

Les composantes de cette force, évaluées avec les axes (X, Y, Z) selon la disposition qui a déjà été adoptée, c'est-à-dire à l'aide de relations analogues aux relations (I-8) et compte tenu des relations (I-6), sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_{1x} &= \frac{-|q_1|q_2}{c^2 r^2} (A \sin \theta_2 \cos \psi \, dr + Dr \cos \theta_2 \cos \psi \, d\theta_2 - Dr \sin \theta_2 \sin \psi \, d\psi) \\ \delta^2 f_{1y} &= \frac{-q_1 q_2}{c^2 r^2} (A \sin \theta_2 \sin \psi \, dr + Dr \cos \theta_2 \sin \psi \, d\theta_2 + Dr \sin \theta_2 \cos \psi \, d\psi) \\ \delta^2 f_{1z} &= \frac{-|q_1|q_2}{c^2 r^2} (A \cos \theta_2 \, dr - Dr \sin \theta_2 \, d\theta_2). \end{aligned} \right.$$

Comme cette force n'apparaît pas expérimentalement, semble-t-il, bien que son ordre de grandeur serait bien supérieur à celui des forces électromagnétiques, il faut en conclure ou bien que l'on a

$$A \equiv 0 \quad \text{et} \quad D \equiv 0$$

ou tout au moins, puisqu'on opère sur des circuits fermés, que la force exercée par l'ensemble d'un circuit fermé C sur la particule P est nulle si l'on se borne aux termes du 1^{er} ordre, condition que nous désignerons en abrégé « condition C/P 1 ».

Cette condition s'obtient en écrivant que l'intégrale de chacune des 3 composantes le long d'un circuit fermé quelconque est nulle. En d'autres termes, $\delta^2 f_{1x}$, $\delta^2 f_{1y}$, et $\delta^2 f_{1z}$ doivent être des différentielles totales.

Le calcul donne facilement :

$$(III-19) \quad \text{condition C/P I : } A + D = 0.$$

§ 7. Condition sur les termes de second ordre

En ne considérant maintenant que les termes du second degré, la force partielle exercée par l'élément de courant $I_1 \, ds_1$ sur une particule q_2 fixe est, d'après la relation (III-13) :

$$\delta^2 \bar{f}_2 = \frac{|q_1|q_2}{c^2 r^2} v_1^2 \left[u_r (B \sin^2 \theta_1 + C \cos^2 \theta_1) + \overline{u_n} E \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \eta + \overline{u_p} E \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \eta \right].$$

On pourrait appeler « condition C/P 2 » la relation entre les coefficients B, C et E telle que la force $\delta^2 \bar{f}_2$ exercée du fait des termes du second ordre par un circuit fermé C sur une particule P soit nulle.

Mais l'étude des conséquences de cette condition ne sera poursuivie que dans le cadre relativiste. Elle est en effet en relation avec la loi particulière relative aux particules accélérées et, dans le cadre non relativiste, nous nous bornerons au cas des particules non accélérées, car le chapitre suivant va nous montrer la nécessité d'abandonner ce cadre.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS ET CONSÉQUENCES
DE LA LOI PARTICULAIRE NON RELATIVISTE

§ 1. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule

Appliquons les résultats établis au chapitre précédent à l'examen de l'influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule (fixe ou en mouvement), sur un courant élémentaire et sur la matière, en nous bornant au cas du plan.

Il y a lieu de partir de l'expression de la force exercée par un courant élémentaire I_1 de longueur ds_1 sur une particule q_2 . Cette expression est donnée par la relation (III-13) où il suffit, dans le cas actuel, de faire $\eta = 0$. On obtient (en mettant en évidence la densité linéaire ρ_1 des particules négatives du courant avec $-|q_1| = \rho_1 ds_1$) :

$$(IV-1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_r &= \frac{\rho_1 q_2 ds_1}{c^2 r^2} [A c v_1 \cos \theta_1 - v_1^2 (B \sin^2 \theta_1 + C \cos^2 \theta_1) \\ &\quad + 2 v_1 v_2 (C \cos \theta_1 \cos \theta_2 + B \sin \theta_1 \sin \theta_2)] \\ \delta^2 f_n &= \frac{\rho_1 q_2 ds_1}{c^2 r^2} [D c v_1 \sin \theta_1 - E v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ &\quad + E v_1 v_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_1)] \end{aligned} \right.$$

Avec les axes (x, y) placés comme l'indique la figure 8 de telle sorte que le courant soit parallèle à Oy et se trouve à la distance R de cet axe, les composantes de la force élémentaire sont :

$$(IV-2) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_x &= \delta^2 f_r \sin \theta_1 - \delta^2 f_n \cos \theta_1 \\ \delta^2 f_y &= \delta^2 f_r \cos \theta_1 + \delta^2 f_n \sin \theta_1 \end{aligned} \right.$$

où l'on fait apparaître $d\theta_1$ par :

$$\frac{ds_1}{r^2} = - \frac{d\theta_1}{R}.$$

Nous nous bornerons à deux cas particuliers : mouvement parallèle ou mouvement perpendiculaire au courant. Le premier sera défini en prenant $\theta_2 = \theta_1$ et le second en prenant $\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$.

Puis par intégration entre les limites $\theta = +\pi$ et $\theta = 0$, on obtient :
 1° pour une particule en mouvement parallèle au courant :

$$(IV-3) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{\rho_1 q_2}{c^2 R} \frac{2}{3} (v_1^2 - 2v_1 v_2) (2B + C - E) \\ \delta f_y = -\frac{\rho_1 q_2}{cR} \frac{\pi}{2} v_1 (A + D); \end{cases}$$

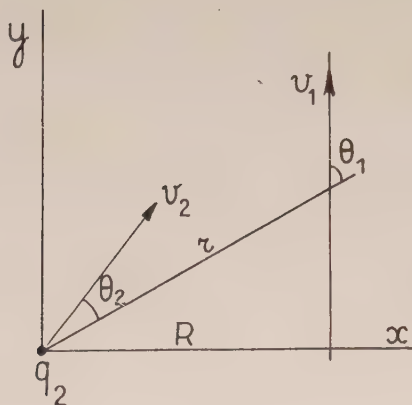


Fig. 8

2° pour une particule en mouvement perpendiculaire au courant :

$$(IV-4) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{\rho_1 q_2}{c^2 R} \frac{2}{3} v_1^2 (2B + C - E) \\ \delta f_y = -\frac{\rho_1 q_2}{cR} \left[\frac{\pi}{2} v_1 (A + D) + \frac{2}{3c} v_1 v_2 (2B - 2C - E) \right]; \end{cases}$$

3° pour une particule fixe ($v_2 = 0$) :

$$(IV-5) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{\rho_1 q_2}{c^2 R} \frac{2}{3} v_1^2 (2B + C - E) \\ \delta f_y = -\frac{\rho_1 q_2}{cR} \frac{\pi}{2} v_1 (A + D). \end{cases}$$

On vérifie bien que la force sur la particule en mouvement est la somme
 — d'une force Φ' indépendante de v_2 et proportionnelle à v_1 ;
 — d'une force Φ'' indépendante de v_2 et proportionnelle à v_1^2 ;
 — d'une force Π (induction) proportionnelle à $v_1 v_2$.

La première de ces forces est nulle si la condition C/P 1 est remplie, soit (relation III-19) :

$$A + D = 0.$$

La seconde de ces forces, proportionnelle à $2B + C - E$ ne peut s'annuler, car la condition C/C (relation III-10) est :

$$2B + C - E = +\frac{3}{2}.$$

On voit donc que pour un courant rectiligne indéfini, la condition C/P 2 est incompatible avec la condition C/C . Il en résulte qu'un tel courant exerce une force sur une particule chargée au repos ⁽¹⁾. Cette force a pour valeur, d'après la première relation (IV-5), compte tenu de $I_1 = \frac{\rho_1}{c}$:

$$(IV-6) \quad \delta f_x = -\frac{I_1 v_1}{cR} q_2.$$

Le produit $I_1 v_1$ étant toujours négatif, une particule négative telle qu'un électron serait donc toujours repoussée par un courant rectiligne indéfini, lorsqu'elle est au repos.

Lorsque la particule est animée d'une vitesse v_2 , la troisième force $\bar{\Pi}$ apparaît.

La valeur totale de la force est alors, d'après (IV-3) et (IV-4) et compte tenu des conditions C/P_1 et C/C :

1° pour une particule en mouvement parallèle au courant :

$$(IV-7) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{\rho_1 q_2}{c^2 R} (v_1^2 - 2v_1 v_2) = \frac{I_1 q_2}{cR} (2v_2 - v_1) \\ \delta f_y = 0; \end{cases}$$

2° pour une particule en mouvement perpendiculaire au courant :

$$(IV-8) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{\rho_1 q_2}{c^2 R} v_1^2 = -\frac{I_1 q_2}{cR} v_1 \\ \delta f_y = -\frac{\rho_1 q_2}{c^2 R} (1 - 2C) v_1 v_2. \end{cases}$$

On voit que dans le premier cas la force d'induction est bien déterminée et égale à la valeur classique $2 \frac{I_1 q_1 v_2}{cR} = 2 \frac{I_1 I_2}{R} ds_2$. Mais, dans le second cas, il faut aussi faire intervenir la condition C/E , qui impose $2C = -1$ (relation III-11) pour retrouver cette valeur.

D'une façon générale, la condition C/E est nécessaire pour retrouver la loi classique dans le cas d'un mouvement quelconque de la particule, mais la condition C/C suffit dans le cas du mouvement parallèle au courant.

⁽¹⁾ Dans le cadre galiléen où nous sommes placés. Cette force serait nulle dans le cadre relativiste, comme nous le verrons plus loin.

§ 2. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur un conducteur mobile

Nous nous bornerons au cas où un élément linéaire de conducteur, placé perpendiculairement au courant, se déplace parallèlement à ce courant.

Soit donc un fil rectiligne parcouru par un courant constant I_1 et suffisamment long pour qu'on puisse le considérer comme de longueur infinie du point de vue de son influence étudiée dans une région voisine de ce fil.

D'après ce qui vient d'être dit au paragraphe précédent, lorsque ce conducteur passe de l'état de repos à l'état de mouvement, ou d'une vitesse w à un autre, une force $\bar{\Pi}$ apparaît sur ses particules mobiles qui modifie le position de celles-ci au sein du conducteur.

Mais, au repos, il existe une force $\bar{\Phi}''$ non nulle qui modifie également ces positions par rapport à celles qui existent en l'absence de courant dans le fil.

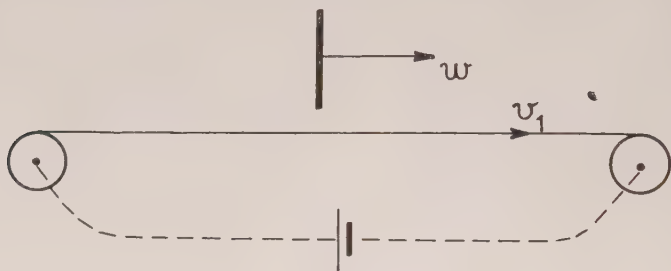


Fig. 9

En effet, les relations (IV-7) et (IV-8) montrent que pour $v_2 = 0$, il s'exerce — sur toute particule positive $+|q_2|$ la force

$$\delta f_{x+} = -\frac{\rho_1 |q_2|}{c^2 R} v_1^2;$$

— sur toute particule négative $-|q_2|$ la force

$$\delta f_{x-} = +\frac{\rho_1 |q_2|}{c^2 R} v_1^2.$$

La première des relations (IV-7) montre que ce n'est que lorsque $v_2 = \frac{v_1}{2}$ que ces forces sont nulles. Ceci est d'ailleurs bien évident car si l'on se rapporte à des axes liés au conducteur animé de la vitesse $\frac{v_1}{2}$, le courant apparaît comme un double flux de particules positives et négatives, animées chacune de vitesses égales et opposées, et dont l'influence résultante est nulle par raison de symétrie.

Inversement, si, le conducteur restant fixe, on déplace le fil sur lui-même, par exemple en l'enroulant à une extrémité et le déroulant à l'autre (fig. 9),

il se produira un déplacement de particules négatives dans le conducteur. Lorsque la vitesse du fil sera égale à $-\frac{v_1}{2}$, le fil n'exercera plus aucune influence sur les particules du conducteur.

§ 3. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur un élément de courant

Nous nous bornerons au cas où un élément de courant *fixe* est parallèle au courant rectiligne indéfini.

La force totale s'exerçant sur l'élément de courant ds_2 est, dans le cas actuel, égal à la somme des forces s'exerçant sur les particules positives et des forces s'exerçant sur les particules négatives, c'est-à-dire, d'après les relations (IV-7),

— sur une particule positive $+ |q_2|$:

$$\delta f_{x+} = -\frac{\rho_1 |q_2|}{c^2 R} v_1^2 ;$$

— sur une particule négative $- |q_2|$:

$$\delta f_{x-} = -\frac{\rho_1 |q_2|}{c^2 R} v_1^2 - \frac{\rho_1 |q_2|}{c^2 R} 2v_1 v_2 ;$$

— donc au total :

$$\delta f_x = -\frac{\rho_1 |q_2|}{c^2 R} 2v_1 v_2 = \frac{2 I_1 I_2}{R} ds_2.$$

En définitive, la force mesurée expérimentalement est déterminée complètement par I_1 et I_2 , mais ses composantes peuvent avoir différentes valeurs selon les valeurs de v_1 et de v_2 . On peut toujours en effet, si l'on considère un courant d'intensité donnée $I = \frac{\rho}{c} v$, réaliser cette même intensité en utilisant des valeurs différentes ρ' et v' telles que l'on ait encore $I = \frac{\rho'}{c} v'$ (il suffit pour cela de modifier simultanément la section du conducteur et la différence de potentiel aux bornes).

Dans ces conditions, la force sur la particule positive $+ |q_2|$ est toujours positive (attraction) et proportionnelle à $I_1 v_1$. La force sur la particule négative $- |q_2|$ change de signe pour $v_1 = 2 v_2$. Les électrons de l'élément de courant I_2 peuvent donc être, en présence d'un courant rectiligne d'intensité donnée I_1 , soit attirés, soit repoussés, selon les valeurs relatives de v_1 et de v_2 et sans que cela change la force totale sur cet élément.

§ 4. Influence d'un courant fermé quelconque sur un flux électronique

Considérons l'influence du courant sur chaque particule prise séparément.

La relation (III-13) montre que la force exercée sur une particule q_2 de vitesse v_2 est la somme :

— de la force exercée par le courant sur le courant équivalent à la particule défini par $I ds = \frac{q}{c} v$ (termes du groupe II).

— de la force exercée par le courant sur la particule si celle-ci était fixe (termes du groupe I).

Dans le cas où la vitesse v_2 est très grande par rapport à la vitesse moyenne v_1 des électrons du courant (tout en restant suffisamment faible par rapport à la constante c pour qu'on puisse négliger les termes de degré supérieur à $\frac{v^2}{c^2}$), les termes en $v_1 v_2$ (groupe II) deviennent prépondérants. En posant $\frac{q_2 v_2}{c} = I_2 ds_2$ on retrouve, la condition C/E étant remplie, l'expression de l'influence d'un courant sur un courant. Il en résulte que dans ce cas, on peut assimiler le déplacement d'un électron à un courant.

Par contre, ce serait inexact dans le cas des électrons lents. Dans ce dernier cas, il faut en effet tenir compte des termes du groupe I. Les termes en v_1 de ce groupe n'interviennent pas si l'on admet la condition C/P 1. Mais les termes en v_1^2 de ce groupe ne peuvent être éliminés que si la condition C/P 2 est remplie, ce qui n'est pas le cas en particulier pour le circuit rectiligne, comme nous l'avons vu au paragraphe 1 de ce chapitre ⁽¹⁾.

§ 5. Influence d'un plan uniformément chargé sur un flux électronique

Soit un plan indéfini recouvert uniformément d'une couche de charges électriques de densité superficielle σ et une particule de charge q se déplaçant à une vitesse v parallèlement à ce plan, à une distance h de ce plan (fig. 10).

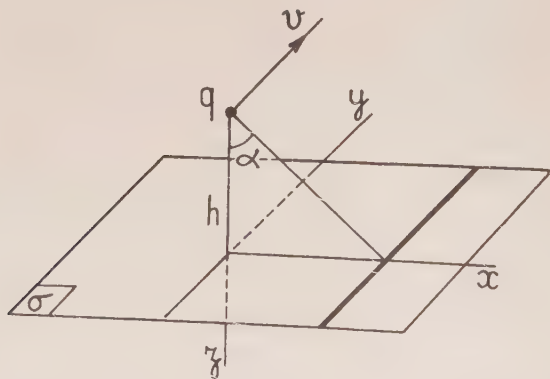


Fig. 10

⁽¹⁾ On peut expérimentalement éliminer les termes du groupe II ainsi que les termes en v_1 du groupe I, en utilisant des circuits constitués de deux courants superposés, égaux et de sens contraires (par exemple, bobines sans self constituées d'enroulements de même nombre de tours en chaque sens). Il ne restera alors que l'influence des termes en v_1^2 du groupe I.

En partant de la relation (III-6) on établit facilement que la force exercée par une bande de largeur dx a pour composantes :

— suivant la direction y :

$$\delta f_y = - \frac{\rho \sigma dx \cos^2 \alpha}{c^2} - \frac{\pi}{h} \frac{c v}{2} (A + D)$$

qui est nulle du moment que nous admettons la condition C/P 1;

— suivant la direction z (positive vers le bas) :

$$\delta f_z = + \frac{\rho \sigma dx \cos^2 \alpha}{c^2} - \frac{\pi}{h} \left[-2 + \frac{2}{3} (E - C - 2B) v^2 \right]$$

qui devient, par intégration pour tout le plan, en notant que $d\alpha = \frac{\cos^2 \alpha dx}{h}$:

$$(IV-9) \quad f_z = - \pi q \sigma \left[2 + \frac{2}{3} (2B + C - E) v^2 \right].$$

En admettant la condition C/C $\left(2 + BC - E = + \frac{3}{2} \right)$, on obtient :

$$(IV-10) \quad f_z = - 2 \pi q \sigma \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

(En relativité, nous obtiendrions le facteur $1 - \frac{1}{2} v^2$, voir chap. VI.)

§ 6. Conclusions

Les deux expériences suivantes peuvent être envisagées comme test du choix du cadre galiléen :

a. La déviation d'un faisceau électronique sous l'effet d'un champ électrostatique;

b. L'influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule chargée au repos.

Il y a lieu d'admettre que l'expérience contredit les résultats théoriques, c'est-à-dire pour *a* la relation (IV-10), et pour *b* la relation (IV-6), et qu'en conséquence le cadre galiléen est à abandonner.

Nous allons donc reprendre les calculs de la loi particulière dans le cadre relativiste.

CHAPITRE V

LOI GÉNÉRALE RELATIVISTE D'INTERACTION ENTRE PARTICULES NON ACCÉLÉRÉES

§ 1. Position du problème

Nous allons maintenant reprendre les calculs qui ont fait l'objet des chapitres III et IV en nous plaçant cette fois dans le cadre relativiste.

Le choix de ce cadre s'impose dès le moment où sont réunies les trois conditions suivantes :

- a* — on admet qu'il n'y a pas de système de référence privilégié;
- b* — on rejette l'hypothèse d'une action instantanée à distance;
- c* — on admet que la vitesse de propagation de l'influence d'une particule mobile ne dépend pas de la vitesse de cette particule (pour un observateur non accéléré).

La condition *a* semble bien avoir un caractère axiomatique. Nous l'avons d'ailleurs déjà rencontrée au chapitre III au début de l'exposé non relativiste. Elle implique que la vitesse de propagation de l'influence, évaluée par rapport à la source, est constante. En outre, si l'interaction de deux particules mobiles dépend de leurs vitesses, elle ne dépend que de leur vitesse relative.

La condition *b* peut être considérée comme vérifiée par l'expérience.

Par contre, la condition *c* ne présente pas un caractère de nécessité logique ou expérimentale. On sait en particulier que l'expérience de MICHELSON permet de vérifier les hypothèses *a* et *b*, mais ne prouve pas que la vitesse de la lumière émise par une source soit indépendante de la vitesse de la source, puisque justement la source possède dans l'expérience, la même vitesse que l'observateur, ce qui fait que la constance de la vitesse de la lumière par rapport à l'observateur peut aussi bien s'expliquer par la constance de la vitesse par rapport à la source.

Toutefois, cette indépendance est présumée d'après les observations effectuées sur les étoiles doubles, encore que l'interprétation de ces observations ait été contestée. En définitive, on peut admettre ou non la condition *c*.

Dans la négative, c'est-à-dire si l'on admet que pour tout observateur la vitesse de la lumière varie avec celle de la source, celle-ci reste toujours au centre de l'onde émise. Il en est de même pour une particule mobile par rap-

port à sa zone d'influence, en supposant que son influence se propage suivant les mêmes lois que la lumière. Avec cette hypothèse, il n'y a pas de système privilégié, mais on peut cependant admettre l'utilisation d'axes espace-temps de référence galiléens. L'exposé des chapitres III et IV entre dans ce cadre que l'on pourrait appeler « pseudo-relativiste » ou de « relativité galiléenne ».

Au contraire, si l'on admet la condition c , c'est-à-dire s'il existe une vitesse de propagation dont la valeur est indépendante de l'observateur et en particulier de la source, on est alors dans le cas de la relativité qui va faire l'objet du présent chapitre et des suivants. Dans ce cas, admettons qu'on puisse écrire, en appelant q_1 et q_2 les valeurs des charges mesurées au repos (ces valeurs sont donc les mêmes pour un observateur fixe et pour un observateur en mouvement) :

$$(V-1) \quad m_0 \bar{\gamma} = - \frac{q_1 q_2}{r^2} \bar{\Phi}(v)$$

avec, au repos :

$$(V-2) \quad m_0 \bar{\gamma} = - \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{1}{r}.$$

Il s'ensuit que $\bar{\Phi}(v)$ est sans dimension et par conséquent doit s'écrire sous la forme $\bar{\Psi}\left(\frac{v}{c}\right)$ où c est une constante ayant les dimensions d'une vitesse, que l'on peut choisir justement égale à la vitesse de propagation invariante de l'influence. Dans ce qui va suivre, cette constante c sera prise égale à l'unité.

§ 2. Retour sur la notion de force

Tout d'abord, il faut reprendre à nouveau la définition de la force exercée sur une particule en mouvement.

Rappelons ce qui a été dit précédemment à ce sujet, à savoir que si la force sur une particule au repos est facile à définir sans ambiguïté, par contre la définition de la force sur une particule en mouvement reste arbitraire. De cette définition, ainsi que de la mesure de l'accélération qui, elle, est une donnée expérimentalement accessible, découlera la notion de masse d'une particule en mouvement.

Nous reviendrons plus loin sur les différentes définitions possibles, mais ce point sera examiné à part afin de ne pas alourdir l'exposé. Donnons sans la discuter la définition qui va être adoptée : la force qui s'exerce sur une particule en mouvement de masse au repos m_0 et possédant une accélération γ sera définie par le vecteur :

$$(V-3) \quad \bar{f} = m_0 \bar{\gamma}.$$

Ce vecteur sera appelé « force effective » pour le distinguer du vecteur « force classique » (relativiste) :

$$(V-4) \quad \bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = m\bar{\gamma} + \bar{v} \frac{dm}{dt} \quad \left(\text{avec } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \right).$$

Au repos, la « force effective » se confond avec la « force classique », et dans ce cas nous emploierons simplement le mot « force ».

Cette convention que rien n'interdit de faire ⁽¹⁾, présente certains avantages, du moins pour les calculs qui vont suivre; en particulier l'addition des vecteurs « force effective » s'effectue très simplement, et, dans le cas de changement d'axes espace-temps, les règles de transformation sont les mêmes que celles de l'accélération.

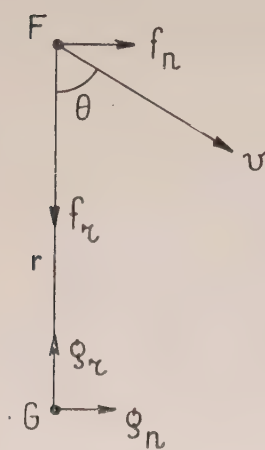


Fig. 11

§ 3. Forme de la loi particulière

Soient deux particules F et G en interaction et en mouvement uniforme l'une par rapport à l'autre. Comme il n'y a pas de systèmes privilégiés, on peut toujours se rapporter à des axes liés à l'une d'elles, G par exemple. Par rapport à ces axes (fig. 11), la position *actuelle* de l'autre particule est F, à la distance r de G, avec une vitesse v faisant l'angle θ avec la droite FG.

Soient $\bar{f}$ la force effective s'exerçant sur F, et $\bar{g}$ la force s'exerçant sur G. Les composantes radiales f_r et g_r , et normales f_n et g_n , de ces forces seront évaluées suivant les sens indiqués sur la fig. 11.

Nous allons poser *a priori*, comme il a été fait au chapitre III, que la loi particulière limitée aux termes du second ordre a la forme suivante, qui tient compte du postulat de symétrie, et où q_1 et q_2 sont les valeurs des charges telles qu'elles sont mesurées au repos :

$$(V-5) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + av \cos \theta + bv^2 \sin^2 \theta + cv^2 \cos^2 \theta] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [dv \sin \theta + ev^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{cases}$$

Il s'agit tout d'abord de rechercher l'expression correspondante de la force $\bar{g}$ sur G. Cette expression est en effet différente de celle de $\bar{f}$ car les forces ne sont plus égales, parallèles et de sens opposé comme il en était dans le cadre galiléen.

Pour cela, nous allons passer des axes liés à F, axes pour lesquels la position actuelle de G est maintenant G' à la distance r' , le point G' ayant une vitesse encore égale à v mais orientée suivant un angle θ' . Avec ces axes, la force $\bar{f}$ aura une nouvelle valeur f' différente de (V-5). En exprimant cette valeur en fonction de la nouvelle valeur r' du rayon vecteur et de la nouvelle

(1) Elle revient simplement à ne considérer que les accélérations.

valeur θ' de l'angle de la vitesse, on obtient (voir calcul en annexe au chapitre V).

$$\begin{cases} f'_r = -\frac{q_1 q_2}{r'^2} \left[1 + av \cos \theta' + (b+1) v^2 \sin^2 \theta' + \left(c + \frac{1}{2}\right) v^2 \cos^2 \theta' \right] \\ f'_n = -\frac{q_1 q_2}{r'^2} [d v \sin \theta' + (e+1) v^2 \sin \theta' \cos \theta']. \end{cases}$$

Enfin, en écrivant r et θ au lieu de r' et θ' , ainsi que g_r au lieu de f'_r et $-g_n$ au lieu de f'_n , ceci pour revenir aux dispositions précédentes où la particule fixe est G, on obtient l'expression cherchée de la force exercée par une particule mobile F sur une particule fixe G :

$$(V-6) \quad \begin{cases} g_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + av \cos \theta + (b+1) v^2 \sin^2 \theta + \left(c + \frac{1}{2}\right) v^2 \cos^2 \theta \right] \\ g_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-d v \sin \theta - (e+1) v^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{cases}$$

On voit, en comparant (V-6) et (V-5), que la connaissance de la force effective sur l'une des particules entraîne celle de la force effective sur l'autre, et que l'on passe de l'une à l'autre de ces forces par les relations :

$$(V-7) \quad \begin{cases} \begin{cases} g_r = f_r \left(1 + v^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \right) \\ g_n = -f_n - f_r v^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \\ \begin{cases} f_r = g_r \left(1 - v^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \right) \\ f_n = -g_n + g_r v^2 \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \end{cases}$$

Cette relation entre les forces effectives $\bar{f}$ et $\bar{g}$ (ou la relation analogue entre les accélérations $\bar{\gamma}_F$ et $\bar{\gamma}_G$) est imposée par la cinématique relativiste et ne dépend aucunement des coefficients de la loi particulaire. Elle résulte seulement du postulat selon lequel il n'y a pas de systèmes privilégiés.

§ 4. Expression générale de la loi particulaire

Recherchons maintenant l'expression de la force effective dans le cas général où les deux particules sont mobiles.

Il est toujours possible de choisir des axes (r, n, p) tels que les dispositions habituelles soient réalisées, c'est-à-dire (fig. 12) :

— particule mobile q_2 en F à l'origine, sa vitesse v_2 faisant un angle θ_2 avec r ;

— particule mobile q_1 en G, sa vitesse v_1 faisant angle un θ_1 avec l'axe r , et située dans un plan faisant l'angle η avec le plan (r, n) .

Le calcul, que nous ne reproduirons pas étant donné sa longueur, conduit à :

$$(V.8) \left\{ \begin{aligned} f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &\left[1 + a (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(c + \frac{1}{2} \right) v_1^2 \cos^2 \theta_1 + b v_2^2 \sin^2 \theta_2 + c v_2^2 \cos^2 \theta_2 \right. \\ &\quad \left. - 2 (b+1) v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta - (2c+3) v_1 v_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right] \\ f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &\quad (v_1 \sin \theta_1 \cos \eta - v_2 \sin \theta_2) [-d + (e+1) v_1 \cos \theta_1 - e v_2 \cos \theta_2] \\ f_p &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1 \sin \theta_1 \sin \eta [-d + (e+1) v_1 \cos \theta_1 - e v_2 \cos \theta_2] \end{aligned} \right.$$

$$(V.9) \left\{ \begin{aligned} g_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &\left[1 + a (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) + b v_1^2 \sin^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + c v_1^2 \cos^2 \theta_1 + (b+1) v_2^2 \sin^2 \theta_2 + \left(c + \frac{1}{2} \right) v_2^2 \cos^2 \theta_2 \right. \\ &\quad \left. - 2 (b+1) v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta - (2c+3) v_1 v_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right] \\ g_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &\quad (v_1 \sin \theta_1 \cos \eta - v_2 \sin \theta_2) [d + (e+1) v_2 \cos \theta_2 - e v_1 \cos \theta_1] \\ g_p &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1 \sin \theta_1 \sin \eta [d + (e+1) v_2 \cos \theta_2 - e v_1 \cos \theta_1]. \end{aligned} \right.$$

(en rappelant que f_r est orienté de F vers G, et g_r de G vers F).

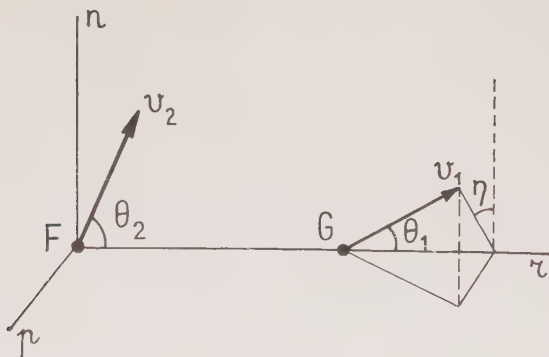


Fig. 12

On en déduit les relations suivantes qui seront utilisées par la suite :

a. Expression de la force exercée par une particule fixe (1) sur une particule mobile (2) placée à l'origine :

$$(V-10) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + av_2 \cos \theta_2 + bv_2^2 \sin^2 \theta_2 + cv_2^2 \cos^2 \theta_2] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [d v_2 \sin \theta_2 + ev_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2] \\ f_p = 0 \end{cases}$$

b. Expression de la force exercée par une particule mobile (1) sur une particule fixe (2) placée à l'origine est :

$$(V-11) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - av_1 \cos \theta_1 + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 + \left(c + \frac{2}{1} \right) v_1^2 \cos^2 \theta_1 \right] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-d + (e+1) v_1 \cos \theta_1] v_1 \sin \theta_1 \cos \eta \\ f_p = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-d + (e+1) v_1 \cos \theta_1] v_1 \sin \theta_1 \sin \eta \end{cases}$$

c. Expression de la loi générale définissant la force exercée par un élément (1) sur une particule mobile q_2 placée à l'origine. Elle s'obtient en faisant la somme des forces effectives exercées sur q_2 par la charge mobile $-|q'_1|$ et par la charge fixe $+|q_1|$, c'est-à-dire, en retranchant les relations (V-8) des relations (V-10) :

$$(V-12) \quad \begin{cases} \delta^2 f_r = -\frac{|q_1| q_2}{r^2} \left[av_1 \cos \theta_1 - (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 - \left(c + \frac{1}{2} \right) v_1^2 \cos^2 \theta_1 \right. \\ \quad \left. + 2(b+1) v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta + (2c+3) v_1 v_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right] \\ \delta^2 f_n = -\frac{|q_1| q_2}{r^2} \left[dv_1 \sin \theta_1 \cos \eta - (e+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \eta \right. \\ \quad \left. + (e+1) v_1 v_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + ev_1 v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta \right] \\ \delta^2 F_p = -\frac{|q_1| q_2}{r^2} \left[dv_1 \sin \theta_1 \sin \eta - (e+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \eta \right. \\ \quad \left. + ev_1 v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta \right] \end{cases}$$

d'où, si la particule q_2 est fixe :

$$(V-13) \quad \begin{cases} \delta^2 f_r = -\frac{|q_1| q_2}{r^2} \left[av_1 \cos \theta_1 - (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 - \left(c + \frac{1}{2} \right) v_1^2 \cos^2 \theta_1 \right] \\ \delta^2 f_r = -\frac{|q_1| q_2}{r^2} [dv_1 \sin \theta_1 - (e+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \cos \eta \\ \delta^2 f_n = -\frac{|q_1| q_2}{r^2} [dv_1 \sin \theta_1 - (e+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \sin \eta. \end{cases}$$

§ 5. Expression générale de la loi élémentaire

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la force exercée par un élément de courant (1) sur un élément de courant (2), placés avec la disposition habituelle (axes r , n , p).

a. Force exercée par l'élément (1) sur les particules fixes (2)₊ de (2) :

— exprimée par les crochets de relations (V-13), multipliés par le facteur $-\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$;

b. Force exercée par l'élément (1) sur les particules mobiles (2)₋ de (2) :

— exprimée par les crochets des relations (V-12), multipliés par le facteur $-\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$.

Cette force sur (2)₋ se transmet sur (2)₊, mais en se modifiant puisque dans le cadre actuel il n'y a pas égalité de l'action et de la réaction. Il serait donc inexact, en principe, d'ajouter purement et simplement cette force b aux forces a s'exerçant sur (2)₊ ainsi qu'il a été fait au chapitre III. Il faut en effet utiliser les relations (V-7).

Mais comme dans le cas présent, f_r est au moins du premier ordre, cette correction n'apporte que des termes d'ordre supérieur à 2. Elle est donc à négliger (elle ne le serait plus s'il s'agissait par exemple de l'influence d'une particule chargée sur un élément de courant).

c. Force exercée par l'élément (1) sur l'élément (2).

La force résultante s'obtient comme il vient d'être dit en ajoutant les deux forces a et b , ce qui conduit, en faisant intervenir les intensités par $Ids = qv$, à :

$$(V-14) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [(2c+3) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 2(b+1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [(e+1) \cos \theta_1 \sin \theta_2 + e \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} e \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta. \end{array} \right.$$

Telle est la forme de la loi élémentaire la plus générale dans le cadre de la relativité (comparer avec les relations III-8 valables dans le cadre galiléen).

§ 6. Calcul des coefficients de la loi particulière

La loi élémentaire que l'on vient d'obtenir a bien la forme exigée par les relations (I-4), où les coefficients A_{ijk} ont pour valeur :

$$(V-15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{111} = 2c + 3 & A_{221} = 2b + 2 \\ A_{122} = e + 1 & A_{212} = e. \end{array} \right.$$

En définitive, les relations (I-4) ayant un caractère tout à fait général ⁽¹⁾, on voit que le choix du cadre relativiste correspond à la condition :

$$(V-16) \quad A_{122} = A_{212} + 1$$

que nous appellerons « *condition R* ». Cette condition réduit à *trois* le nombre des coefficients de la loi élémentaire. Comme on le voit, elle est incompatible la condition F.P. (qui est $A_{122} = A_{212}$, relation II-8) et a fortiori avec la condition F.C. qui est un cas particulier de la précédente, conditions qui résultaient du choix du cadre galiléen ⁽²⁾.

Faisons maintenant intervenir les données de l'expérience :

1° On peut imposer la condition C/C. Cette condition (II-7), que nous rappelons :

$$A_{212} - 2A_{221} + A_{122} - A_{111} + 3 = 0$$

s'écrit, en tenant compte des relations (V-15), c'est-à-dire en tenant compte de la condition R et en prenant les notations b, c, e :

$$(V-17) \quad 2b + c - e = -\frac{3}{2}.$$

Elle réduit à deux le nombre des coefficients inconnus de la loi élémentaire.

2° Peut-on maintenant admettre la condition C/E? Cette question ne se posait pas pour la condition C/C, car cette dernière a été obtenue au chapitre II par application des lois expérimentales relatives aux circuits fermés immobiles et nous avons déjà souligné que le calcul des chapitres I et II sont indépendants du choix du cadre spatio-temporel. Il n'en est pas de même pour les calculs du chapitre III qui ont permis d'adopter la condition C/E dans le cas non-relativiste par l'application des lois expérimentales de l'induction (circuits fermés mobiles).

Mais la démonstration en question, qui a fait l'objet du paragraphe 5 du chapitre III repose sur le fait que les termes en $v_1 v_2$ de l'expression de la force exercée par un élément sur une particule (termes du groupe II de la relation III-13) sont les mêmes que ceux de l'expression de la force exercée par un élément sur un élément (relation III-8).

Or, cette dernière remarque reste toujours valable dans le cadre relativiste : on voit en effet que les termes en $v_1 v_2$ de la relation (V-12) sont les mêmes que ceux de la loi élémentaire (V-14). Dire que ces termes en $v_1 v_2$, lorsqu'une particule q_2 a une vitesse v_2 au voisinage d'un circuit fermé, sont définis expérimentalement

⁽¹⁾ En partant des postulats A et B du Chap. I, § 3. Mais il est facile de vérifier que la loi particulière relativiste implique le postulat B, qui devient de ce fait inutile : il suffit pour cela de calculer séparément les quatre A_{ijk} dans chacun des cas particuliers qui leur correspondent. D'autre part, cette loi particulière implique aussi évidemment le postulat A. En fait, le seul postulat de départ reste donc finalement constitué par les relations (V-5) et la condition de relativité. On peut alors dire que le fait que les relations (I-4) et (V-14) ont la même forme, est un argument en faveur de l'interprétation particulière des courants.

⁽²⁾ Il en résulte que, dans le cadre de la relativité, on ne peut choisir une définition de la force telle que l'égalité de l'action et de la réaction soit vérifiée dans tous les systèmes de référence entre particules en mouvement relatifs.

talement par la relation (III-15), qui exprime la première loi de l'induction et qui est vérifiée par la loi de LAPLACE, revient à dire que l'action d'un circuit fermé sur un élément est également calculable par la loi de LAPLACE. La condition C/E reste donc valable dans le cadre relativiste.

Les conditions (II-4) qui expriment C/E s'écrivent alors, à l'aide des relations (V-15), c'est-à-dire compte tenu de la condition R :

$$(V-18) \quad e = 2b \quad c = -\frac{3}{2}.$$

Il est remarquable que la condition E/C est alors également vérifiée (relations II-6). Inversement, il est facile de vérifier que la conjonction de la condition E/C et de la condition R vérifie la condition C/E.

En conséquence, sur le schéma (fig. 4) du chapitre II représentant les positions logiques des différentes conditions, ces trois conditions ont un domaine commun, qui est représenté hachuré.

Dans ce domaine, il ne reste qu'un paramètre, car de (V-15) et de (V-18) on déduit, en ne conservant plus que le coefficient b :

$$(V-19) \quad A_{111} = 0 \quad A_{221} = 2b + 2 \quad A_{122} = 2b + 1 \quad A_{212} = 2b.$$

La loi de LAPLACE (qui satisfait donc à la condition R, ce qui était loin d'être évident) ⁽¹⁾ correspond à $b = -\frac{1}{2}$, mais au point où nous sommes parvenus, rien n'autorise à donner à b telle ou telle valeur particulière. Il nous faut pour cela fixer de nouvelles conditions, ce qui sera fait par la suite.

3° En ce qui concerne les termes du premier degré en v , il est facile de voir que la condition C/P 1 s'écrit comme la relation (III-19) :

$$(V-20) \quad a + d = 0$$

la démonstration du paragraphe 6 du chapitre III restant valable dans le cadre relativiste.

§ 7. Conclusions

Finalement, lorsqu'on tient compte de la condition C/E exprimée par les relations (V-18), il ne reste plus, pour les termes du second degré, que le coefficient b .

⁽¹⁾ C'est ce qui explique l'échec des recherches exécutées au cours du XIX^e siècle pour relier la loi de LAPLACE à une loi particulière dans le cadre galiléen. Dans ce cadre, c'est la condition F.P. qui doit être satisfaite.

On peut alors se demander pourquoi, à l'origine de l'étude des phénomènes électriques, c'est-à-dire dans le cadre galiléen, la loi de LAPLACE a été choisie plutôt que la loi d'AMPERÈRE, alors que cette dernière conduisait aux mêmes résultats en ce qui concerne l'influence C/C d'un courant sur un courant, et celle C/E d'un courant sur un élément, tout en satisfaisant à la condition FC compatible avec le cadre galiléen.

Cela tient, semble-t-il, au fait que l'influence C/E se traduit par une force normale à l'élément E, ce qui a conduit à utiliser une loi élémentaire ayant la même propriété, c'est-à-dire la loi de LAPLACE.

Dès lors, la voie menant à la Relativité était ouverte.

1° L'expression générale (V-8) et (V-9) de la loi particulière devient :

$$(V-21) \quad \left\{ \begin{aligned} f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &\left[1 + a (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + b v_2^2 \sin^2 \theta_2 - \frac{3}{2} v_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2(b+1) v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta \right] \\ f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &(v_1 \sin \theta_1 \cos \eta - v_2 \sin \theta_2) [-d + (2b+1) v_1 \cos \theta_1 - 2b v_2 \cos \theta_2] \\ f_p &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1 \sin \theta_1 \sin \eta [-d + (2b+1) v_1 \cos \theta_1 - 2b v_2 \cos \theta_2] \end{aligned} \right.$$

$$(V-22) \quad \left\{ \begin{aligned} g_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &\left[1 + a (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) + b v_1^2 \sin^2 \theta_1 - \frac{3}{2} v_1^2 \cos^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + (b+1) v_2^2 \sin^2 \theta_2 - v_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2(b+1) v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta \right] \\ g_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &(v_1 \sin \theta_1 \cos \eta - v_2 \sin \theta_2) [d + (2b+1) v_2 \cos \theta_2 - 2b v_1 \cos \theta_1] \\ g_p &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1 \sin \theta_1 \sin \eta [d + (2b+1) v_2 \cos \theta_2 - 2b v_1 \cos \theta_1] \end{aligned} \right.$$

2° Des relations (V-10) et (V-11), on déduit que la force exercée par une particule fixe (1) sur une particule mobile (2), placée à l'origine, est :

$$(V-23) \quad \left\{ \begin{aligned} f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + a v_2 \cos \theta_2 + b v_2^2 \sin^2 \theta_2 - \frac{3}{2} v_2^2 \cos^2 \theta_2 \right] \\ f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} [d v_2 \sin \theta_2 + 2b v_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2] \\ f_p &= 0 \end{aligned} \right.$$

et que la force exercée par une particule mobile (1) sur une particule fixe (2) placée à l'origine est :

$$(V-24) \quad \left\{ \begin{aligned} f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 - a v_1 \cos \theta_1 + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1] \\ f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-d + (2b+1) v_1 \cos \theta_1] v_1 \sin \theta_1 \cos \eta \\ f_p &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-d + (2b+1) v_1 \cos \theta_1] v_1 \sin \theta_1 \sin \eta; \end{aligned} \right.$$

3° L'expression de la loi définissant l'influence d'un élément (1) sur une particule mobile q_2 est, d'après les relations (V-12) :

$$(V-25) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_r &= -\frac{|q_1|q_2}{r^2} [av_1 \cos \theta_1 - (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 + v_1^2 \cos \theta_1 \\ &\quad + 2(b+1) v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta] \\ \delta^2 f_n &= -\frac{|q_1|q_2}{r^2} [dv_1 \sin \theta_1 \cos \eta + (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \sin \theta_1 \cos \eta) \\ &\quad (2b+1) v_1 \cos \theta_1 + 2bv_1 v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta] \\ \delta^2 f_p &= -\frac{|q_1|q_2}{r^2} (v_1 \sin \theta_1 \sin \eta) [d - (2b+1) v_1 \cos \theta_1 + 2bv_2 \cos \theta_2]. \end{aligned} \right.$$

Par suite, l'influence exercée par un élément sur une particule fixe est :

$$(V-26) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_r &= -\frac{|q_1|q_2}{r^2} [av_1 \cos \theta_1 - (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 + v_1^2 \cos^2 \theta_1] \\ \delta^2 f_n &= -\frac{|q_1|q_2}{r^2} [dv_1 \sin \theta_1 - (2b+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \cos \eta \\ \delta^2 f_p &= -\frac{|q_1|q_2}{r^2} [dv_1 \sin \theta_1 - (2b+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \sin \eta \end{aligned} \right.$$

4° L'expression de la loi élémentaire est d'après (V-14) :

$$(V-27) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 F_r &= \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} 2(b+1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta \\ d^2 F_n &= \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [(2b+1) \cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2b \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_p &= \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} 2b \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta. \end{aligned} \right.$$

Il est facile d'obtenir l'expression de la force sur l'élément (1) : on remarquera que, d'après les relations (V-19) et (I-10), il suffit d'intervenir les facteur $2b+1$ dans $d^2 F_n$ et $d^2 F_p$, et de changer le signe de $d^2 F_r$.

On retrouve ainsi que le principe de l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas vérifié entre éléments, ce qui tient à ce que la condition R est incompatible avec la condition F.P. Toutefois, ce principe est vérifié pour l'interaction de circuits fermés, puisque la condition C/C est satisfaite. Entre éléments, on a seulement $d^2 F_r = -d^2 G_r$.

NOTA I. — La loi particulière exprimée sous la forme la plus générale par les relations (V-8) et (V-9) représente, dans un système de référence quelconque, donné les forces qui s'exercent à un instant donné entre particules situées à cet instant à une distance r l'une de l'autre et ayant les vitesses v_1 et v_2 dans ce système.

Mais le procédé d'établissement de cette loi (réciprocité de F et de G) implique que ces particules aient des vitesses constantes.

La force sur F est donc définissable à partir de n'importe quel point de la ligne d'univers de G lorsque celle-ci est rectiligne. On peut être ainsi amené à

faire jouer *a priori* un rôle particulier à tel ou tel point de la ligne d'univers de G.

NOTA II. — Si maintenant l'on tient compte, comme il se doit, de la condition C/E, la loi particulière est exprimée par les relations (V-21) et (V-22), mais n'est pas encore complètement définie puisque les coefficients a , d et b sont encore inconnus.

Soulignons que cette loi exprime la force effective sur une particule en mouvement, *c'est-à-dire en définitive son accélération*, lorsque la particule n'est pas soumise à d'autre forces.

Toute autre définition de la force sur une particule en mouvement conduirait évidemment à une loi de forme différente. Mais si l'on tient compte de la définition de la masse qui résulte de cette autre définition de la force, et si l'on calcule l'accélération, on doit obligatoirement pour cette dernière obtenir des relations identiques à celles donnant la force effective. Les résultats expérimentaux de mesure de l'accélération sont en effet évidemment indépendants des définitions adoptées pour le calcul.

En outre, on doit également retrouver la même forme de la loi élémentaire, puisqu'il s'agit alors de force classique, et que toute définition arbitraire de force sur une particule en mouvement doit redonner la force classique dans le cas particulier où la particule est fixe.

Nous reviendrons sur ces points au chapitre VIII, mais l'on peut dire, dès maintenant, que les calculs précédents ont un caractère tout à fait général, et que les relations obtenues sont indépendantes de l'utilisation qui a été faite de la notion de « force effective ».

ANNEXE AU CHAPITRE V

CALCUL DE LA FORCE EXERCÉE PAR UNE PARTICULE MOBILE
SUR UNE PARTICULE FIXE

1° Force effective exercée par une particule fixe G sur une particule mobile F (relations V-5).

$$(a) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + av \cos \theta + bv^2 \sin^2 \theta + cv^2 \cos^2 \theta] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [dv \sin \theta + ev^2 \sin \theta \cos \theta]; \end{cases}$$

2° Transformation de cette force effective par passage à des axes liés à F. Cette force se transforme comme une accélération. On passera donc par l'intermédiaire de ses projections f_v et f_n sur la vitesse est sur la normale à la vitesse :

$$(b) \quad \begin{cases} f_v = f_r \cos \theta + f_n \sin \theta \\ f_n = f_r \sin \theta - f_n \cos \theta \end{cases}$$

qui se transformeront suivant les relations classiques :

$$(c) \quad \begin{cases} f'_v = f_v \frac{1}{(1-v^2)^{3/2}} \\ f'_n = f_n \frac{1}{1-v^2} \end{cases}$$

d'où en reprojétant sur le nouveau rayon vecteur et sur sa normale :

$$(d) \quad \begin{cases} f'_r = f'_v \cos \theta' + f'_n \sin \theta' \\ f'_n = f'_v \sin \theta' - f'_n \cos \theta'; \end{cases}$$

3° Calcul des nouvelles valeurs r' et θ' par :

$$(e) \quad \begin{cases} r' \cos \theta' = r \sqrt{1-v^2} \cos \theta \\ r' \sin \theta' = r \sin \theta \end{cases}$$

d'où

$$(f) \quad \frac{r'^2}{r^2} = \frac{1-v^2}{1-v^2 \sin^2 \theta'}$$

$$(g) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\cos \theta'}{\sqrt{1-v^2 \sin^2 \theta'}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{1-v^2} \sin \theta'}{\sqrt{1-v^2 \sin^2 \theta'}}; \end{cases}$$

4^o D'une part, on porte (g) dans (d), compte tenu de (c) et de (b) :

$$\begin{cases} f'_r = f_r \frac{\sqrt{1-v^2 \sin^2 \theta'}}{(1-v^2)^{3/2}} \\ f'_n = f_r \frac{v^2 \sin \theta' \cos \theta'}{\sqrt{1-v^2 \sin^2 \theta'} (1+v^2)^{3/2}} + f_n \frac{1}{\sqrt{1-v^2 \sin^2 \theta'} (1-v^2)} \end{cases}$$

ou, en se bornant au second ordre :

$$(h) \quad \begin{cases} f'_r = f_r \left(1 + v^2 \sin^2 \theta' + \frac{3}{2} v^2 \cos^2 \theta' \right) \\ f'_n = f_r v^2 \sin \theta' \cos \theta' + f_n; \end{cases}$$

5^o D'autre part, on porte (f) et (g) dans (a), d'où en se bornant au second ordre :

$$(i) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r'^2} [1 + av \cos \theta' + bv^2 \sin^2 \theta' + (c-1) v^2 \cos^2 \theta'] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r'^2} [dv \sin \theta' + ev^2 \sin \theta' \cos \theta']; \end{cases}$$

6^o Enfin en portant (i) dans (h), on obtient :

$$(j) \quad \begin{cases} f'_r = -\frac{q_1 q_2}{r'^2} \left[1 + av \cos \theta' + (b+1) v^2 \sin^2 \theta' + \left(c + \frac{1}{2} \right) v^2 \cos^2 \theta' \right] \\ f'_n = \frac{q_1 q_2}{r'^2} [dv \sin \theta' + (e+1) v^2 \sin \theta' \cos \theta'] \end{cases}$$

qui est l'expression de la force exercée sur F dans un système lié à cette particule.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS ET CONSÉQUENCES
DE LA LOI PARTICULAIRE RELATIVISTE (SANS ACCÉLÉRATION)

§ 1. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule

Comme nous l'avons fait au chapitre IV dans le cadre galiléen, nous allons appliquer les relations obtenues au chapitre précédent pour déterminer l'influence exercée par un courant rectiligne indéfini sur une particule, en nous bornant au cas du plan.

Le calcul à partir des relations (V-12) conduit à :

1° Pour une particule en mouvement parallèle au courant :

$$(VI-1) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{|\rho_1| q_2}{R} \left[-\frac{2}{3} \left(2b + c - e + \frac{3}{2} \right) v_1^2 + \frac{4}{3} (2b + c - e + 3) v_1 v_2 \right] \\ \delta f_y = -\frac{|\rho_1| q_2}{R} \frac{\pi}{2} (a + d) v_1; \end{cases}$$

2° Pour une particule en mouvement perpendiculaire au courant :

$$(VI-2) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{|\rho_1| q_2}{R} \left[-\frac{2}{3} \left(2b + c - e + \frac{3}{2} \right) v_1^2 \right] \\ \delta f_y = -\frac{|\rho_1| q_2}{R} \left[\frac{\pi}{2} (a + d) v_1 - \frac{2}{3} (2b + 2c - e) v_1 v_2 \right]. \end{cases}$$

3° Pour une particule fixe :

$$(VI-3) \quad \begin{cases} \delta f_x = -\frac{|\rho_1| q_2}{R} \frac{2}{3} \left(2b + c - e + \frac{3}{2} \right) v_1^2 \\ \delta f_y = -\frac{|\rho_1| q_2}{R} \frac{\pi}{2} (a + d) v_1. \end{cases}$$

On voit que la force sur une particule en mouvement est la somme de trois forces :

— l'une Φ' indépendante de v_2 et proportionnelle à v_1 . Elle est nulle si $a + d = 0$, car on retrouve évidemment la condition C/P 1.

— l'autre $\overline{\Phi''}$ indépendante de v_2 et proportionnelle à v_1^2 . Elle est nulle pour :

$$2b + c - e = -\frac{3}{2}.$$

Or cette relation n'est autre que la condition C/C (relation V-17). En conséquence, un courant rectiligne indéfini n'exerce pas de force sur une particule fixe, tout au moins par ses termes de second ordre : il satisfait donc à la condition C/P 2, ce qui n'était pas le cas dans le cadre galiléen (Chap. IV). L'influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule est donc un test du choix du cadre spatio-temporel.

-- enfin une troisième force Π apparaît du fait de l'existence de la vitesse v_2 . Dans le cas d'un mouvement parallèle au courant, elle est égale à la valeur classique $-\frac{\rho_1 q_2}{R} 2v_1 v_2$ lorsque la condition C/C est remplie et, dans le cas d'un mouvement perpendiculaire au courant, lorsque $c = -\frac{3}{2}$ et $e = 2b$, c'est-à-dire lorsque la condition C/E est remplie.

En définitive, l'influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule mobile permet d'établir la condition C/E (et *a fortiori* C/C), et ceci indépendamment de la valeur du coefficient b encore inconnu.

Notons enfin que, dans le cas présent, un électron en mouvement peut effectivement être assimilé à un courant, les conditions C/P I et C/P 2 étant ici satisfaites.

§ 2. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur un conducteur mobile

Revenons à l'expérience dont il a été question au Chapitre IV, §. 2, concernant l'influence exercée sur les particules d'un conducteur par un courant rectiligne suffisamment long et susceptible de glisser sur lui-même.

Considérons une de ces particules au voisinage du courant. Lorsque le courant est fixe et la particule mobile, il s'exerce sur elle, comme on vient de le voir, une force définie par la condition C/E. Mais lorsque la particule est fixe et le courant mobile, nous allons voir qu'il ne s'exerce pas de force sur la particule. Cependant, on aurait pu penser qu'il existe une force, puisqu'il en existe une lorsque la particule est mobile et que le fait de se rapporter à des axes liés à la particule ne saurait avoir pour effet d'annuler cette force. Examinons comment se lève ce « paradoxe de l'électromagnétisme ».

Afin de préciser les idées, il y a lieu de reprendre le calcul du paragraphe précédent en distinguant, dans la force qui s'exerce sur la particule mobile q_2 de vitesse v_2 (première des relations VI-1), la part qui revient aux particules fixes du courant et celle qui revient aux particules négatives de vitesse v_1 de ce courant.

Ce calcul a été effectué à partir de la loi particulière (V-21) pour le plan ($\eta = 0$). Il donne, pour l'influence des particules mobiles du courant :

$$\text{VI-4)} \quad \delta f_{x-} = + \frac{|\rho_1| q_2}{R} [2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2]$$

et en ce qui concerne les particules fixes :

$$(VI-5) \quad \delta f_{x+} = - \frac{|\rho_1| q^2}{R} [2 + v_2^2].$$

Ces deux expressions mettent en évidence d'une part l'influence coulombienne (en $\frac{2}{R}$) et d'autre part des influences complémentaires fonctions des vitesses.

Il est manifeste que les influences complémentaires sont séparément nulles pour $v_2 = 0$. Autrement dit, une droite chargée et en mouvement sur elle-même n'a pas d'influence sur une particule du fait de sa vitesse v_1 , et n'a donc d'influence que du fait de sa densité ρ_1 qui a une action purement coulombienne.

Il en résulte immédiatement que le courant mobile n'a pas d'effet sur la particule fixe, bien que ses particules positives et négatives soient animées de vitesses différentes. En effet, leur densité linéaire $-|\rho_1|$ et $+|\rho_1|$ est la même, et cela du fait du dispositif expérimental adopté (fil conducteur suffisamment long s'enroulant à une extrémité et se déroulant à l'autre, ou encore règle métallique glissant sur deux points extrêmes, ces deux extrémités étant fixes par rapport à la particule).

Par contre, si la particule se déplace par rapport au courant (ou inversement si l'ensemble du courant, y compris les extrémités de la portion rectiligne, se déplace par rapport à la particule), alors les densités linéaires apparentes sont différentes si on les observe dans un système d'axes liés à la particule.

En effet, la densité des particules positives est devenue :

$$(VI-6) \quad \frac{+|\rho_1|}{\sqrt{1-v_2^2}} \nu + |\rho_1| \left(1 + \frac{1}{2} v_2^2\right)$$

alors que la densité des particules négatives est devenue :

$$(VI-7) \quad -|\rho_1| \frac{\sqrt{1-v_1^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1-v_2}{1-v_1 v_2}\right)^2}} = -|\rho_1| \frac{1-v_1 v_2}{\sqrt{1-v_1^2}} \nu - |\rho_1| \left(1 - v_1 v_2 + \frac{1}{2} v_2^2\right).$$

Comme la force coulombienne exercée par une ligne droite indéfinie de densité électrique ρ a pour valeur :

$$\delta f_x = -2 \frac{\rho q^2}{R}$$

on a donc :

$$\begin{cases} \delta f_{x+} = - \frac{+|\rho_1| q^2}{R} 2 \left(1 + \frac{1}{2} v_2^2\right) \\ \delta f_{x-} = - \frac{-|\rho_1| q^2}{R} 2 \left(1 - v_1 v_2 + \frac{1}{2} v_2^2\right) \end{cases}$$

et, au total :

$$f_x = - \frac{|\rho_1| q^2}{R} 2 v_1 v_2.$$

Le retour aux axes fixes ne change pas ces expressions puisque celles-ci sont déjà du second ordre, et comme l'on retrouve ainsi le résultat (relations VI-4 et VI-5) obtenu à partir de la loi particulière. on peut dire : l'action d'un courant rectiligne indéfini sur une particule mobile parallèlement au courant est due uniquement à la force coulombienne, mais compte tenu de la déformation relativiste des éléments constituant ce courant. L'influence des termes autres que le terme purement coulombien c'est-à-dire des termes en v_1 et v_1^2 étendue à l'ensemble du circuit est nulle (condition C/P 1 réalisée par hypothèse et condition C/P 2 identique ici à la condition C/C réalisée par hypothèse).

NOTA 1. — Il n'en est plus de même lorsque la particule influencée est mobile dans une direction non parallèle au courant.

NOTA 2. — Les conclusions étant différentes dans le cadre galiléen (Chap. IV), l'expérience en question peut constituer un test du choix du cadre spatio-temporel.

NOTA 3. — Résumons l'ensemble des résultats démontrés :

a. Portion AB constituée d'un conducteur glissant sur lui-même (fig. 13 a).

conducteur fixe + particule mobile ..	influence
conducteur mobile + particule fixe...	pas d'influence
conducteur mobile + particule mobile.	influence

b. Portion AB liée au circuit (fig. 13 b) :

circuit fixe + particule mobile.....	influence
circuit mobile + particule fixe.....	influence
circuit mobile + particule mobile	
(ensemble)	pas d'influence

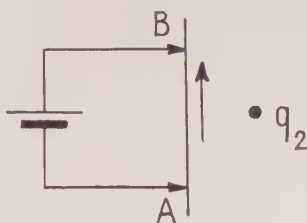


Fig. 13 a

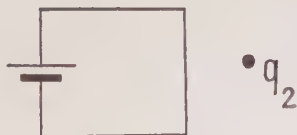


Fig. 13 b

Ces résultats seront généralisés au cas des circuits circulaires tournant sur eux-mêmes (induction unipolaire, Chap. X).

§ 3. Influence d'un plan uniformément chargé sur un flux électronique

Ainsi qu'il a été fait au paragraphe 5 du Chapitre IV dans le cadre non relativiste, calculons la force exercée par un plan indéfini recouvert d'une couche de charges de densité superficielle σ , sur une particule q se déplaçant à une vitesse v parallèlement à ce plan.

Le calcul est immédiat si l'on se reporte à ce qui a été dit au paragraphe précédent. Nous avons vu que lorsque on admet la condition C/C, tout se passe comme si la seule force coulombienne intervenait, compte tenu de la contraction relativiste des longueurs dans le sens de la vitesse, ce qui a pour effet d'augmenter la densité des charges en la multipliant par le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

On peut donc écrire, puisque $-2\pi q\rho$ est la force exercée sur une particule fixe, l'expression de la force effective F' sur la charge mobile, par rapport à des axes liés à cette charge :

$$F' = m_0 \gamma' = -2\pi q \sigma \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

En se rapportant à des axes fixes (liés au plan), la formule de transformation de l'accélération transversale conduit à :

$$(VI-8) \quad \gamma = \gamma' (1 - v^2) = -\frac{2\pi q \sigma}{m_0} \sqrt{1-v^2}.$$

On retrouve évidemment le même résultat que par l'interprétation classique qui consiste à dire que la force est toujours égale à $-2\pi q \sigma$ et que la masse est divisée par $\sqrt{1-v^2}$.

En conséquence, l'expérience consistant à mesurer la déviation d'un faisceau électronique de vitesse donnée, se déplaçant parallèlement à un plan uniformément chargé, conduit aux conclusions suivantes :

a. Elle permet (la condition C/C étant admise) de justifier le choix du cadre relativiste, puisque dans le cadre galiléen la déviation serait différente : la relation (VI-8) diffère en effet de la relation (IV-10), et conduit à une correction $1 - \frac{1}{2}v^2$ au lieu de $1 + \frac{1}{2}v^2$, en se bornant aux termes du second ordre ⁽¹⁾;

⁽¹⁾ On peut aussi présenter le calcul directement à partir de la loi particulière. On a vu au Chap. IV, § 5, que dans le cas de la non-relativité, la force sur la particule mobile était donnée par la relation (IV-9) :

$$f_z = -\pi q \sigma \left[2 + \frac{2}{3} (2B + C - E) v^2 \right]$$

et l'on devait prendre (condition C/C en non-relativité) :

$$2B + C - E = +\frac{3}{2}$$

ce qui conduisait à :

$$f_z = -2\pi q \sigma \left(1 + \frac{1}{2}v^2 \right).$$

(Suite de ce nota à la fin de la page suivante.)

b. Plus précisément elle vérifie la contraction relativiste des longueurs. Elle ne peut vérifier la variation de la masse puisque cette variation est arbitraire. Il se trouve seulement que la convention habituellement choisie par la variation de la masse est la même que la variation de l'inverse de la longueur;

c. Inversement, si l'on choisit *a priori* le cadre relativiste, cette expérience ne fait que vérifier la relation C/C et ne peut servir à déterminer la valeur de b ⁽¹⁾.

(Suite du nota de la page précédente.)

Le calcul, à partir de la loi particulière dans le cas relativiste, aurait évidemment conduit à une relation analogue à (IV-9), soit :

$$f_z = -\pi q \sigma \left[2 + \frac{2}{3} (2b + c - e) v^2 \right].$$

Mais cette fois il faut prendre (condition C/C en relativité)

$$2b + c - e = -\frac{3}{2}$$

ce qui conduit à

$$f_z = -2\pi q \sigma \left(1 - \frac{1}{2} v^2 \right).$$

⁽¹⁾ Par contre, la déviation dans un champ électrique non uniforme dépend de la valeur de b . C'est le cas par exemple d'un faisceau électronique se déplaçant entre deux électrodes dont les longueurs ne sont pas très grandes par rapport à leur distance (on se rapproche alors du cas de l'interaction entre particules).

CHAPITRE VII

LOI GÉNÉRALE RELATIVISTE D'INTERACTION
ENTRE PARTICULES ACCÉLÉRÉES

§ 1. Forme générale de la loi d'accélération

Ce qui a été dit au nota 1 du Chapitre V peut se généraliser au cas où les particules sont animées d'un mouvement quelconque.

Soit F la particule influencée placée à l'origine du système de référence, sans avoir obligatoirement la même vitesse que ce système, et G_0 la position retardée de la particule influençante. L'expression de la force sur F est :

$$(a) \quad \bar{f} = \psi(\bar{r}_{G_0 F}, \bar{v}_F, \bar{v}_{G_0}, \bar{\gamma}_{G_0}, \bar{\dot{\gamma}}_{G_0}, \text{ etc.}).$$

Si le mouvement de G est continu, et à cette condition seulement, c'est-à-dire si la position actuelle G et ses dérivées successives peuvent se calculer à partir de la position retardée G_0 et de ses dérivées successives, on pourra toujours écrire l'expression précédente en fonction des éléments cinématiques caractérisant la position actuelle, c'est-à-dire sous la forme :

$$(b) \quad \bar{f} = \Phi(\bar{r}_{GF}, \bar{v}_F, \bar{v}_G, \bar{\gamma}_G, \bar{\dot{\gamma}}_G, \text{ etc.}).$$

Dans ces conditions, d'ailleurs, toute notion de propagation disparaît, car si l'on passe à un nouveau système de référence toujours d'origine F, mais de vitesse différente, dans lequel la nouvelle position actuelle de G est G' , on aboutira évidemment par simple transformation cinématique, à une expression de la même forme que (b) :

$$(c) \quad f' = \Phi(r'_{G'F}, v'_F, v'_G, \gamma'_G, \dot{\gamma}'_G, \text{ etc.}).$$

On peut alors indifféremment exprimer la loi particulière en fonction de la position retardée ou de la position actuelle.

Par contre, si la ligne d'univers de G subit une perturbation (discontinuité d'une des dérivées) entre G_0 et G , il est évident qu'on ne peut plus passer de la relation (a) à la relation (b), et qu'il faut faire une hypothèse sur la propagation de la perturbation, par exemple en postulant que la relation (a) est seule valable.

Cependant, dans ce qui va suivre, nous admettrons au moins provisoirement que les éléments cinématiques de la ligne d'univers de G sont continus, et que par suite la loi d'interaction peut valablement s'exprimer en fonction des positions actuelles.

Dans les chapitres précédents, cette loi d'interaction avait été développée en série à partir de la loi de COULOMB et en nous limitant aux termes en $\frac{1}{r^2 c}$ et $\frac{1}{r^2 c^2}$. Ce développement pourrait être prolongé par des termes en $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{c^4}$, etc., et s'écrirait alors, sous forme symbolique :

$$f = - \frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right) + \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \left(\frac{v^3}{c^3} \right) + \left(\frac{v^4}{c^4} \right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{\gamma r}{c^2} \right) + \left(\frac{v \gamma r}{c^3} \right) + \left(\frac{\gamma^2 r^2}{c^4} \right) + \frac{v^2 \gamma r}{c^4} + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{\dot{\gamma} r^2}{c^3} \right) + \left(\frac{v \dot{\gamma} r^2}{c^4} \right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{\ddot{\gamma} r^3}{c^4} \right) + \dots \right].$$

Mais l'utilisation de l'ensemble (A) des données expérimentales choisies ne peut en aucune façon permettre la détermination des coefficients des termes d'ordre $\frac{1}{c^3}$ et au-delà, ce qui exige d'ailleurs, et nous l'admettrons *a priori*, que les valeurs de v , de γ , de $\dot{\gamma}$, etc., ainsi que de r , restent assez faibles pour que les termes en $\frac{1}{c^3}$ et au-delà puissent être négligés.

Par contre, dès le moment où l'on admet de considérer les termes en $\frac{1}{c^2}$, on voit qu'il ne suffit pas de retenir ceux en $\frac{v^2}{c^2}$, mais qu'il est indispensable d'admettre aussi un terme en $\frac{\gamma r}{c^2}$, soit, toujours symboliquement :

$$f = - \frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right) + \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \left(\frac{\gamma r}{c^2} \right) \right] = - \frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right) + \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] - \frac{q_1 q_2 \gamma}{r c^2}.$$

Dans ces conditions, la force partielle, due à l'accélération seule, qu'exerce sur une particule q_2 , une autre particule q_1 ayant une accélération γ qui fait un angle φ avec le rayon vecteur (fig. 14) aura nécessairement pour forme générale :

$$(VII-1) \quad \begin{cases} \delta^2 f_{\gamma r} = - \frac{q_1 q_2 \gamma}{c^2 r} M \cos \varphi \\ \delta^2 f_{\gamma n} = - \frac{q_1 q_2 \gamma}{c^2 r} N \sin \varphi \end{cases}$$

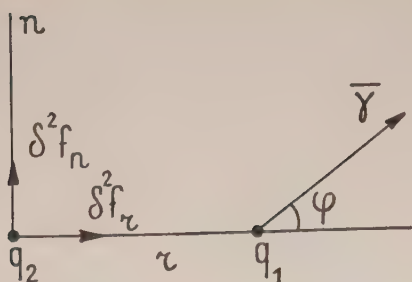


Fig. 14

ceci en admettant que les projections de $d^2 f_\gamma$ ne dépendent que de celles de γ . et compte tenu du principe de symétrie.

Dans ce qui va suivre, nous prendrons $c = 1$, comme précédemment.

§ 2. Plan suivi

Nous allons examiner successivement l'influence exercée sur une particule par des circuits fermés à intensité constante et par des circuits fermés à intensité variable.

Dans le premier cas, les particules mobiles du circuit sont soumises à une accélération γ_N normale au circuit, du fait que ce circuit n'est pas rectiligne. Dans le second cas, intervient en plus une accélération tangentielle γ_T qui traduit la variation d'intensité.

a. Dans le cas de l'intensité constante, nous allons chercher comment s'exprime la condition selon laquelle un circuit fermé et fixe, à intensité constante, n'exerce aucune force sur une particule chargée fixe, du fait des termes en $\frac{1}{c^2}$, condition que nous appellerons C/P 2.

b. Dans le cas de l'intensité variable, comme l'accélération résultante γ a pour valeur $\gamma_T + \gamma_N$, et étant donné la forme (VII-1) de l'expression des composantes de $d^2 f_\gamma$, on peut calculer séparément l'influence de γ_T et celle de γ_N . Pour un tel circuit, l'influence de γ_N est donc la même que si l'intensité était constante. L'effet d'induction est dû à la seule influence de γ_T . Nous allons alors chercher comment s'exprime la condition selon laquelle un circuit C fixe à intensité variable exerce sur un élément conducteur fixe E une influence définie par la loi classique de l'induction, condition que nous appellerons CV/E. C'est par l'étude de ce second cas que nous allons commencer.

A. — CONDITION CV/E

§ 3. Expression de la seconde loi de l'induction

Soit un courant fermé (1), dont toutes les particules mobiles aient en même temps la même accélération tangentielle γ_T , liée à l'intensité par :

$$(VII-2) \quad \frac{dI_1}{dt} = \rho_1 \frac{dv_1}{dt} = \rho_1 \gamma_T.$$

La force que chacune de ces particules exerce, du fait de cette accélération γ_T , sur une particule fixe q_2 , placée à l'origine, a pour composante, d'après (VII-1) :

$$\begin{cases} \delta^2 f_r = -\frac{q_1 q_2}{r} \gamma_T M \cos \theta_1 \\ \delta^2 f_n = -\frac{q_1 q_2}{r} \gamma_T N \sin \theta_1 \cos \eta \\ \delta^2 f_p = -\frac{q_1 q_2}{r} \gamma_T N \sin \theta_1 \sin \eta \end{cases}$$

d'où, en passant aux axes (X, Y, Z) à l'aide des relations (I-8) :

$$\delta^2 f_x = -\frac{q_1 q_2}{r} \gamma_T [M \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \psi - N \sin \theta_1 \cos \eta \cos \theta_2 \cos \psi + N \sin \theta_1 \sin \eta \sin \psi]$$

ou, en remplaçant q_1 par $\rho_1 ds_1$ et en utilisant les relations (I-6) :

$$\delta f_x = -q_2 \frac{dI_1}{dt} \int_1 \frac{1}{r} (M \sin \theta_2 \cos \psi dr + Nr \cos \theta_2 \cos \psi d\theta_2 - Nr \sin \theta_2 \sin \psi d\psi)$$

et ces relations analogues pour δf_y et δf_z .

D'autre part, la loi expérimentale de l'induction entre deux circuits est, c étant le potentiel :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dI_1}{dt} \int_1 \int_2 \frac{ds_1 \cdot ds_2}{r}$$

donc, entre un circuit (1) et un élément (2), $\bar{\varepsilon}$ étant le champ électrique d'induction :

$$de = \bar{\varepsilon} \cdot ds_2 = -\frac{dI_1}{dt} \int_1 \frac{ds_1}{r}$$

et par suite, entre le circuit (1) et une particule fixe q_2 :

$$\overline{\delta f'} = q_2 \cdot \bar{\varepsilon} = -q_2 \frac{dI_1}{dt} \int_1 \frac{ds_1}{r}$$

qui a pour composante suivant OX :

$$\delta f'_x = -q_2 \frac{dI_1}{dt} \int_1 \frac{1}{r} (\sin \theta_2 \cos \psi dr + r \cos \theta_2 \cos \psi d\theta_2 - r \sin \theta_2 \sin \psi d\psi).$$

Il nous suffit d'écrire que $\delta f_x = \delta f'_x$, d'où :

$$-q_2 \frac{dI_1}{dt} \int_1 \left[(M-1) \sin \theta_2 \cos \psi \frac{dr}{r} + (N-1) \cos \theta_2 \cos \psi d\theta_2 - (N-1) \sin \theta_2 \sin \psi d\psi \right] = 0.$$

Or l'ensemble des deux derniers termes entre crochets est la différentielle totale de $(N-1) \sin \theta_2 \cos \psi$ et par suite leur intégrale s'annule. Il suffit donc que l'on ait, dans le cas général, lorsque la forme du circuit fermé est quelconque :

$$(VII-3) \quad M = 1.$$

Comme le même résultat serait obtenu par la considération des autres composantes, ainsi qu'on peut aisément le vérifier, telle est la condition CV/E cherchée.

§ 4. Examen de la notion de flux magnétique

La remarque suivante est bien connue, mais mérite d'être soulignée.

La force électromotrice est généralement exprimée sous la forme :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Cette forme, qui introduit la notion de flux Φ , a l'inconvénient de ne s'appliquer que d'une part aux circuits fermés soumis à l'influence d'un flux variable, ou, d'autre part aux circuits non fermés se déplaçant par rapport à un courant.

a. En ce qui concerne les circuits fermés de surface S constante, avec $\Phi = HS$ (ou plus exactement $\Phi = \int \bar{H} \cdot \bar{n} ds$), cette formule peut laisser à penser que e dépend de $\frac{dH}{dt}$. Il faut prendre soin de remarquer que cela n'est vrai que pour la force électromotrice *totale* induite tout le long du circuit fermé, et non pour la force électromotrice *locale* induite en chaque point du circuit.

On a en effet, en reprenant les notations classiques ($\bar{\varepsilon}$: champ électrique) :

$$\int_c \bar{\varepsilon} \cdot d\bar{l} = \iint (\text{rot } \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{n} dS$$

avec d'une façon générale ⁽¹⁾, $\bar{\mathbf{P}}$ étant le potentiel vecteur :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt}$$

d'où :

$$\text{rot } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{rot } \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\text{rot } \bar{\mathbf{P}}).$$

Or il peut arriver qu'en un point donné de l'espace, $\text{rot } \bar{\mathbf{P}}$ soit nul ainsi que $\frac{d}{dt} (\text{rot } \bar{\mathbf{P}})$, alors que $\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt}$ donc $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ne l'est pas.

C'est le cas par exemple de tout point situé à l'extérieur d'une solénoïde infini ou d'un tore solénoïdal parcouru par un courant non permanent : le champ magnétique est toujours nul, sa dérivée par rapport au temps également, mais il existe cependant un champ électrique non nul induit en chaque point de l'espace (la « circulation » de ce champ étant toutefois nulle pour tout contour n'entourant pas le solénoïde).

Les charges électriques mobiles d'un circuit fermé n'entourant pas le solénoïde peuvent donc être déplacées par induction, bien que ce circuit soit traversé par un flux constamment nul.

b. En ce qui concerne les circuits non fermés se déplaçant par rapport à un courant, on peut parler de flux coupé si le circuit non fermé se déplace. Mais cela devient plus litigieux dans le cas où le courant se déplace. Il faudrait alors admettre que des « lignes de force » se déplacent avec le courant, ce qui est inexact dans le cas de courants se déplaçant sur eux-mêmes (voir par exemple la paradoxe de l'électromagnétisme étudié plus haut).

c. En ce qui concerne les circuits fixes, fermés ou non (et dans ce dernier cas, la formule en question n'a plus de sens), placés sous l'influence de circuits fixes à courant non permanent, la plupart des traités étendent *a priori* à ces circuits les lois de l'induction résultant de l'étude du déplacement relatif des courants permanents. Or rien n'autorise à dire que la variation d'intensité d'un courant doit produire le même effet qu'un certain déplacement relatif de ce courant puisqu'il s'agit là de deux phénomènes de nature complètement différente. Le fait de dire que dans les deux cas, les mêmes effets sont produits par suite d'une même variation de flux, ne saurait constituer une démonstration effective, mais seulement une constatation expérimentale.

Il s'agit là d'une utilisation abusive de la notion artificielle de « champ magnétique ».

La condition CV/E n'a en effet rien de commun avec la condition C/E. La première résulte de l'influence de l'accélération tangentielle du courant C, tandis que la seconde résulte de l'influence de la vitesse de translation constante relative du courant C et d'une particule mobile : c'est pourquoi cette seconde condition concerne aussi bien l'influence mutuelle des courants fixes que la loi de l'induction entre circuits relativement mobiles. La notion

(1) Nous notons $\frac{d}{dt}$ et non $\frac{\partial}{\partial t}$, la particule q_2 étant fixe.

de champ magnétique (donc de flux) que nous avons évité d'employer, d'une part ne permet pas de mettre en évidence l'identité de ces deux phénomènes, et d'autre part réunit sous la même loi d'induction l'influence des courants mobiles et celle des courants d'intensité variable, influences qui sont de nature différente, sous l'angle de l'interprétation particulière des courants.

B. — CONDITION C/P 2

§ 5. Nécessité de l'étude de cette condition

L'ensemble des termes en $\frac{1}{c^2}$ représentant l'influence d'un courant (1) dont les particules ont une vitesse v_1 sur une particule mobile (2) de vitesse v_2 , comprend :

— des termes en $v_1 v_2$, dont les coefficients satisfaisant à la condition C/E permettent de vérifier à la fois la loi d'interaction des courants fixes et la loi de l'induction relative aux courants constants mobiles;

— des termes en v_2^2 , qui sont nuls, puisqu'ils sont indépendants de l'intensité du courant et par conséquent les mêmes que si ce courant était nul;

— des termes en v_1^2 ;

— des termes en γ_N ;

— des termes en γ_T dont les coefficients expriment la loi de l'induction relative aux courants variables (condition CV/E).

Il nous reste donc à examiner les termes en v_1^2 et γ_N , c'est-à-dire l'influence d'un courant fixe et constant sur une particule fixe. Nous appellerons C/P 2 la condition selon laquelle cette influence est nulle.

§ 6. Expression de la condition C/P 2 dans le cas général

La force exercée par un élément de courant permanent sur une particule q_2 fixe placée à l'origine, est définie avec les axes (r, n) par les relations (V-26) et les relations (VII-1) où l'on doit prendre $\varphi = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$:

$$(VII-4) \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1^2 [(b+1) \sin^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_1] - \frac{q_1 q_2}{r} M \gamma_N \sin \theta_1 \\ \delta^2 f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1^2 (2b+1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{q_1 q_2}{r} N \gamma_N \cos \theta_1. \end{aligned} \right.$$

Nous passerons maintenant aux axes (X, Z), en nous bornant au cas du plan. La composante suivant X est :

$$\delta^2 f_x = \delta^2 f_r \sin \theta_2 - \delta^2 f_n \cos \theta_2$$

soit :

$$(VII-5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 f_x = & -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1^2 [(b+1) \sin \theta_2 - (b+2) \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 \\ & - (2b+1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2] \\ & -\frac{q_1 q_2}{r} M \gamma_N \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \frac{q_1 q_2}{r} N \gamma_N \cos \theta_1 \cos \theta_2. \end{aligned} \right.$$

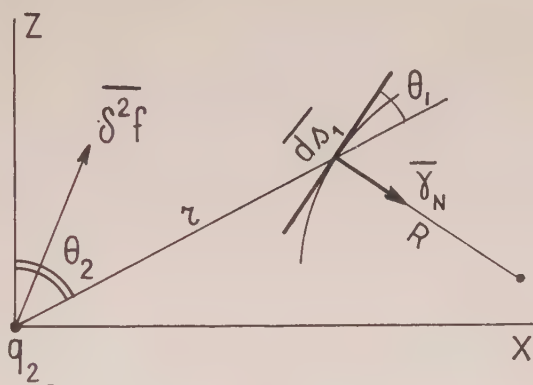


Fig. 15

Dans ces conditions, l'élément de courant ds_1 fait, comme l'indique la figure 15, un angle $\theta_2 - \theta_1$ avec l'axe Z et un angle θ_1 avec le rayon vecteur.

Soit $d\alpha$ l'angle que font les normales aux extrémités de ds_1 . On a, puisque le rayon de courbure est $R = \frac{ds_1}{d\alpha}$:

$$\gamma_N ds_1 = v_1^2 d\alpha$$

d'où, puisque $d\alpha = d(\theta_2 - \theta_1)$:

$$(VII-6) \quad \gamma_N ds_1 = v_1^2 d(\theta_2 - \theta_1)$$

La relation (VII-5) s'écrit alors, compte tenu de $q_1 v_1 = I_1 ds_1$, et de la relation (VII-6) :

$$\begin{aligned} \delta^2 f_x = & -q_2 I_1 v_1 [(b+2) \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 - (2b+1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2] \frac{ds_1}{r^2} \\ & - q_2 I_1 v_1 [M \sin \theta_1 \sin \theta_2 + N \cos \theta_1 \cos \theta_2] \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{r}. \end{aligned}$$

Cette expression peut se transformer en notant que :

$$(VII-7) \quad \begin{cases} ds_1 \cos \theta_1 = dr \\ ds_1 \sin \theta_1 = -r d\theta_2. \end{cases}$$

On peut l'écrire, en omettant provisoirement le facteur $q_2 I_1 v_1$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{ds_1}{r^2} [(b+1) (\sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2) - \sin \theta_2] \\ & + \frac{d\theta_1}{r} [-\sin \theta_1 \sin \theta_2 + b \cos \theta_1 \cos \theta_2] \\ & + \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{r} [(M-1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + (N+b) \cos \theta_1 \cos \theta_2]. \end{aligned} \right.$$

Or les deux premiers termes de cette somme forment une différentielle totale.

On a en effet, en utilisant les relations (VII-7), d'une part :

$$d\left(\frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2}{r}\right) = -\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 ds}{r^2} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1}{r} - \frac{\sin \theta_2 ds}{r^2} + \frac{\sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 ds}{r^2}$$

et d'autre part :

$$d\left(\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{r}\right) = -\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 ds}{r^2} + \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 d\theta_1}{r} + \frac{\sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 ds}{r^2}.$$

Il est alors visible que l'expression étudiée s'écrit :

$$(VII-8) \quad \left\{ \begin{aligned} & d\left(\frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2}{r}\right) + bd\left(\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{r}\right) \\ & - [(M-1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + (N+b) \cos \theta_1 \cos \theta_2] \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{r}. \end{aligned} \right.$$

L'intégration le long d'un circuit fermé entraîne alors la disparition des deux premiers termes, et l'on a finalement :

$$(VII-9) \quad \delta f_x = q_2 I_1 v_1 \int_1 \frac{(M-1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + (N+b) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} d(\theta_2 - \theta_1).$$

Cette intégrale est nulle quel que soit le circuit d'intégration si l'on a :

$$(VII-10) \quad \begin{cases} M-1=0 \\ N+b=0 \end{cases}$$

On obtiendrait le même résultat par la considération de $\delta^2 f_x$.

Les conditions (VII-10) sont suffisantes. Pour montrer qu'elles sont nécessaires, il suffit de vérifier qu'elles sont nécessaires dans certains cas particuliers.

§ 7. Condition C/P 2 dans quelques cas particuliers

1° CIRCUIT RECTILIGNE INDÉFINI. — Dans ce cas, il n'y a pas de terme en γ_N . Les termes en v_1^2 font intervenir b , mais comme nous l'avons vu au Chapitre VI, l'intégration fait disparaître ce coefficient : un circuit rectiligne indéfini n'a pas d'influence sur une particule fixe quelle que soit la valeur de b . Cette conclusion est d'ailleurs très visible sur la relation (VII-8) puisque, dans le cas du courant rectiligne, on a $d\theta_2 = d\theta_1$.

2° CIRCUIT RECTILIGNE NON INDÉFINI. — Considérons une particule q_2 fixe, à l'origine, et une partie d'un courant rectiligne, disposée comme indiqué sur la figure 16.

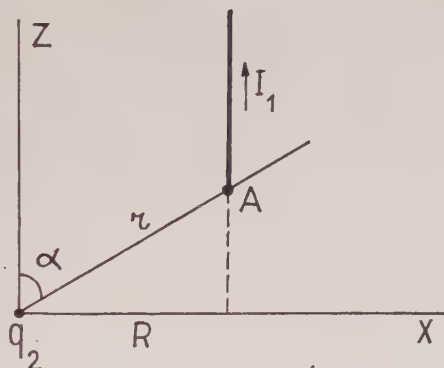


Fig. 16

Les relations (V-26) donnent, en omettant les termes du premier degré en v_1 :

$$\begin{aligned}\delta f_x &= -\frac{q_2 \rho_1}{R} v_1^2 (b+1) [\cos \theta_1 \sin^2 \theta_1]_{\alpha}^{\beta} \\ \delta f_z &= -\frac{q_2 \rho_1}{R} v_1^2 [\sin \theta_1 - (b+1) \sin^3 \theta_1]_{\alpha}^{\beta}\end{aligned}$$

d'où, pour une demi-droite dont l'origine est définie par α (avec $\beta=0$).

$$(VII-11) \quad \begin{cases} \delta f_x = +\frac{q_2 \rho_1}{r} v_1^2 (b+1) \cos \alpha \sin \alpha \\ \delta f_z = +\frac{q_2 \rho_1}{r} v_1^2 [1 - (b+1) \sin^2 \alpha]. \end{cases}$$

Ces relations seront utiles par la suite.

3° CIRCUIT DE FORME PARTICULIÈRE. — Considérons une particule q_2 au centre d'un circuit circulaire de rayon r .

En faisant $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ dans la relation (VII-5), on obtient :

$$\delta^2 f_x = -\frac{q_1 q_2}{r^2} v_1^2 (b+1) \sin \theta_2 - \frac{q_1 q_2}{r} \gamma_N M \sin \theta_2$$

d'où, puisque dans le cas présent $\gamma_N = -\frac{v_1^2}{r}$, et avec $q_1 = \rho_1 ds_1 = -\rho_1 r d\theta_2$

$$\delta^2 f_x = + \frac{q_2 \rho_1}{r} v_1^2 (b + 1 - M) \sin \theta_2 d\theta_2.$$

L'intégrale est nulle pour le cercle complet.

Pour le demi-cercle, on obtient :

$$\delta^2 f'_x = - 2 \frac{q_2 \rho_1}{r} v_1^2 (b + 1 - M).$$

Comme il faut que le circuit soit fermé, prolongeons ce demi-cercle par deux demi-droites parallèles situées dans son plan et tangentes à ses extrémités. La force qui correspond à ces portions rectilignes est donnée par les relations (VII-11) où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit :

$$\delta^2 f''_x = 2 \frac{q_2 \rho_1}{r} v_1^2 b.$$

Au total, la force $\delta^2 f'_x + \delta^2 f''_x$ pour le circuit complet est proportionnelle à :

$$b - (b + 1 - M) = M - 1$$

et est nulle pour $M = 1$. Il se trouve que c'est la condition CV/E. On retrouverait d'ailleurs cette même condition si le demi-cercle était remplacé par un arc quelconque, les portions rectilignes étant toujours tangentes aux extrémités de cet arc, et la particule fixe étant toujours au centre.

4° PARTICULE SUR L'AXE D'UN CIRCUIT CIRCULAIRE. — Soit un circuit circulaire de rayon R et une particule fixe placée sur son axe à une distance x telle que le rayon du circuit soit vu sous un angle α (fig. 17).

La force due à la vitesse est radiale (relations V-26, avec $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$) et a pour valeur, projetée sur l'axe :

$$\delta^2 f_v = - \frac{q_1 q_2}{r^2} v_1^2 (b + 1) \cos \alpha.$$

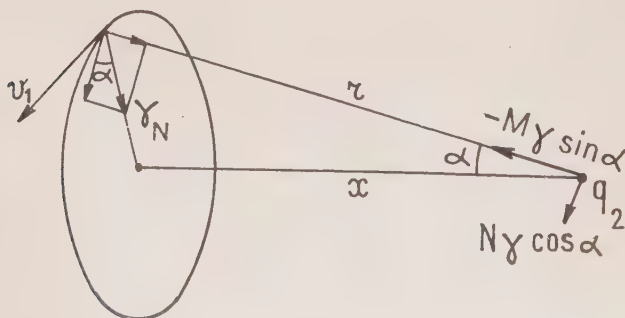


Fig. 17

La force due à l'accélération n'est pas radiale; il faut calculer séparément ses composantes et les projeter sur l'axe. On obtient finalement :

$$\delta^2 f_\gamma = + \frac{q_1 q_2}{r} \gamma_N (M - N) \sin \alpha \cos \alpha$$

d'où, en tenant compte de $\gamma_N = \frac{v_1}{R}$ et de $R = r \sin \alpha$:

$$\delta^2 f = \delta^2 f_v + \delta^2 f_\gamma = - \frac{q_1 q_2}{r^2} v_1^2 (b + 1 - M + N) \cos \alpha$$

c'est-à-dire qu'il se comporte comme s'il portait une charge :

$$Q = 2 \pi R \frac{I_1 v_1}{c^2} (b + N - M + 1).$$

Comme l'exemple précédent a fourni :

$$M = 1$$

il en résulte qu'un circuit circulaire n'exerce pas de force sur une particule fixe placée sur son axe si :

$$b + N = 0.$$

5° CONCLUSION. — Les deux derniers exemples précédents montrent que l'intégrale ne sera certainement nulle dans tous les cas que si l'on a à la fois

$$M = 1 \quad b + N = 0.$$

On retrouve ainsi les relations (VII-10) qui sont donc bien l'expression de la condition C/P 2 (compte tenu de la condition C/E à laquelle satisfait la loi particulière (VII-4) dont on est parti). On remarque que la condition C/P 2 implique la condition CV/E.

§ 8. Forme générale des lois particulières admettant les conditions C/P 1 et C/P 2

La force exercée par une particule mobile q_2 sur une particule fixe placée à l'origine a pour expression, à partir des relations (V-24) et en tenant compte de l'accélération :

$$(VII-12) \quad \left\{ \begin{aligned} f_r &= - \frac{q_1 q_2}{r} \\ &\quad [1 - av \cos \theta_1 + (b + 1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1] - \frac{q_1 q_2}{r} M \gamma \cos \varphi \\ f_n &= - \frac{q_1 q_2}{r} \\ &\quad [- dv_1 \cos \theta_1 + (2b + 1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] - \frac{q_1 q_2}{r} N \gamma \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

En tenant maintenant compte des conditions C/P 1 et C P 2, et en distinguant l'accélération γ_T , parallèle à la vitesse et l'accélération normale γ_N , on obtient :

$$(VII-13) \quad \left\{ \begin{aligned} f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 - av_1 \cos \theta_1 + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1] \\ &\quad - \frac{q_1 q_2}{r} (\gamma_T \cos \theta_1 + \gamma_N \sin \theta_1) \\ f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} [+av_1 \sin \theta_1 + (2b+1) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \\ &\quad + \frac{q_1 q_2}{r} b (\gamma_T \sin \theta_1 + \gamma_N \cos \theta_1). \end{aligned} \right.$$

Cette loi peut s'exprimer d'une façon vectorielle, sous une forme condensée remarquable. Il est nécessaire toutefois de passer au préalable aux axes (X, Z). Nous ne ferons le calcul que pour la coordonnée suivant X :

$$f_x = f_r \sin \theta_2 - f_n \cos \theta_2.$$

Les termes du second ordre de f_x , sont :

1° En ce qui concerne l'accélération normale et la vitesse, d'après la relation (VII-8) dans laquelle on tient compte de la condition C/P 2 :

$$-q_2 I_1 v_1 \left[d \left(\frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2}{r} \right) + bd \left(\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{r} \right) \right];$$

2° En ce qui concerne l'accélération tangentielle :

$$-q_1 q_2 \frac{\gamma_T}{r} (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + b \sin \theta_1 \cos \theta_2) = -q_1 q_2 \frac{dv_1}{dt} \left[\frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2}{r} + b \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{r} \right].$$

Au total, on a donc :

$$f_x^{(2)} = -q_1 q_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{v_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + b v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2}{r} \right).$$

Or $v_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2$ est la projection sur l'axe X de la composante $v_1 \cos \theta_1$ de la vitesse v_1 suivant le rayon vecteur, tandis que $v_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2$ est la projection sur l'axe X (changée de signe) de la composante $v_1 \sin \theta_1$ de la vitesse v_1 normalement au rayon vecteur.

Comme on obtiendrait pour $f_z^{(2)}$ une expression analogue, on peut finalement écrire :

$$\vec{f}^{(2)} = -q_1 q_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}_r - b \vec{v}_n}{r} \right).$$

En ce qui concerne les termes du premier ordre, il est facile de voir qu'ils conduisent en appelant $\bar{u}$ le vecteur unitaire du rayon vecteur, à :

$$f^{(1)} = -q_1 q_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{a \bar{u}}{r} \right).$$

En effet, si $\bar{n}$ est le vecteur unitaire normal à $\bar{u}$, avec $d\bar{u} = \bar{n} d\theta_2$, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{u}}{r} \right) = -\frac{\bar{u}}{r^2} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{r^2} \left(\bar{u} \frac{dr}{dt} + \bar{n} r \frac{d\theta_2}{dt} \right)$$

donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{u}}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} (\bar{u} v_1 \cos \theta_1 - \bar{n} v_1 \sin \theta_1).$$

Finalement, la loi particulière représentant l'influence d'une particule mobile sur une particule fixe dans le cas où les conditions C/P 1 et C/P 2 sont satisfaites est, en faisant la somme de $\bar{f}^{(1)}$, de $\bar{f}^{(2)}$ et du terme en $\frac{1}{r^2}$:

$$(VII-14) \quad \bar{f} = q_1 q_2 \overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) - q_1 q_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-a\bar{u} + \bar{v}_r - b\bar{v}_n}{r} \right).$$

§ 9. Généralisation aux circuits non homogènes ou à discontinuité de forme

Lorsqu'on applique la loi précédente à l'influence d'un circuit sur une particule q_2 , le terme en $\overline{\text{grad}}$ disparaît puisque le circuit comporte un nombre égal de particules de chaque signe, et l'on obtient en mettant en évidence l'intensité :

$$(VII-15) \quad d\bar{F} = -q_2 I_1 d \left(\frac{-a\bar{u} + \bar{v}_r - b\bar{v}_n}{r} \right).$$

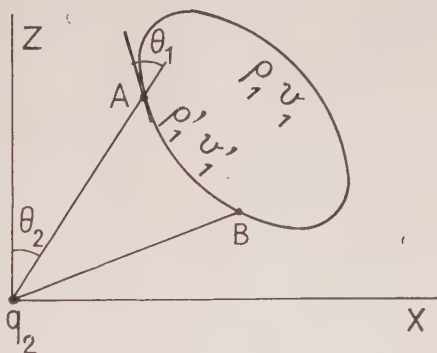


Fig. 18

Il est alors évident que l'intégrale des forces $d\bar{F}$ pour un circuit fermé est nul dès que I_1 est constant, et ceci même si v n'est pas constant.

Ceci nous permet de lever l'hypothèse que nous avons faite plus haut et qui consistait à ne considérer que des courants pour lesquels ρ_1 et v_1 étaient séparément constants. On peut alors généraliser aux cas suivants les conclusions obtenues.

a. CIRCUITS FERMÉS NON HOMOGÈNES. — Soit dans un circuit fermé quelconque (fig. 18), un courant d'intensité I_1 tel que la vitesse et la densité linéaire des particules mobiles prennent dans la partie $\widehat{AB}$ les valeurs constantes ρ_1 et v_1 , et dans la partie $\widehat{BA}$ les valeurs constantes ρ'_1 et v'_1 , avec naturellement :

$$\rho_1 v_1 = \rho'_1 v'_1.$$

La force que la partie $\widehat{AB}$ exerce sur une particule fixe dépend de v_1 et de l'accélération normale sur $\widehat{AB}$. Il en est de même de la force due au parcours $\widehat{BA}$ et la somme de ces forces n'est pas nulle.

Mais il faut tenir compte aussi de l'accélération tangentielle que les particules ont en A pour passer de v_1 à v'_1 , et en B pour passer de v'_1 à v_1 . L'influence de cette accélération tangentielle compense exactement celle de la vitesse et de l'accélération normale. La relation (VII-15) le prouve, et on peut facilement le vérifier par un calcul direct.

b. CIRCUITS AVEC DISCONTINUITÉ DE FORME. — Il en est de même lorsque le contour du circuit comprend des angles, ce qui introduit des discontinuités de direction de la vitesse même si celle-ci restait constante en grandeur. On peut tout d'abord admettre que la vitesse reste continue, ce qui implique une accélération tangentielle localisée aux environs des angles.

Prenons le cas d'un circuit constitué par un angle droit. La composante de la vitesse parallèle à Z varie, au voisinage de l'angle, de v_1 à 0; puis sa composante parallèle à X varie de 0 à v_1 .

Considérons seulement le cas de la branche parallèle à OZ (fig. 16).

L'influence de la vitesse est donnée dans le cas général par les relations (VII-11) :

$$\begin{cases} \delta f_{xv} = + \frac{q_2 I_1}{r} v_1 (b + 1) \cos \alpha \sin \alpha \\ \delta f_{zv} = + \frac{q_2 I_1}{r} v_1 [1 - (b + 1) \sin^2 \alpha]. \end{cases}$$

En ce qui concerne l'accélération, qui est parallèle à OZ, on a :

$$\begin{cases} \delta f_{x\gamma} = + \frac{q_1 q_2}{r} \gamma (M - N) \cos \alpha \sin \alpha \\ \delta f_{z\gamma} = + \frac{q_1 q_2}{r} \gamma (M \cos^2 \alpha + N \sin^2 \alpha). \end{cases}$$

Or, on peut écrire, pour l'ensemble des particules intéressées par l'accélération :

$$\sum q_1 \gamma = \sum \rho_1 ds_1 \frac{dv_1}{dt} = \rho_1 v_1 \sum \Delta v_1 = \rho_1 v_1 \cdot (-v_1) = -I_1 v_1$$

d'où :

$$\begin{cases} \delta f_{x\gamma} = - \frac{q_2 I_1}{r} v_1 (M - N) \cos \alpha \sin \alpha \\ \delta f_{z\gamma} = - \frac{q_2 I_1}{r} v_1 [M - (M - N) \sin^2 \alpha]. \end{cases}$$

L'influence de la vitesse et celle de l'accélération se compensent manifestement dès que l'on prend $M = 1$ et $N = -b$.

Cette conclusion reste valable aussi petit que soit l'intervalle ds_1 où l'accélération est localisée. On peut donc passer à la limite au cas de la discontinuité.

c. CAS GÉNÉRAL. — Si l'on admet que la condition C/P 2 est valable pour un courant dont les particules mobiles ont une densité linéaire homogène (ρ_1 constant) et une vitesse constante, cette condition est alors remplie pour tout circuit de forme quelconque, même présentant des angles, et parcouru par un courant de densité quelconque, même variable d'une façon discontinue le long du circuit, pourvu que l'intensité reste constante.

En particulier les particules mobiles du courant peuvent non seulement être animées de vitesses différentes mais aussi subir des variations de vitesse (en grandeur comme en direction) sous la seule condition que l'intensité conserve une valeur constante.

Si la condition C/P 2 n'était pas vérifiée, alors la relation (VII-9) montre par la présence du facteur $I_1 v_1$ que l'influence pour une intensité donnée dépendrait de v_1 (ou ce qui revient au même, de ρ_1). L'influence d'un courant d'intensité donnée et de forme donnée sur une particule fixe serait donc différente selon la nature du conducteur utilisé.

§ 10. Conclusions

Rassemblons les résultats acquis actuellement concernant les coefficients de la loi particulière.

Celle-ci s'écrit, lorsqu'on l'exprime sous la forme de l'influence exercée par une particule fixe G sur une particule mobile F de vitesse v et d'accélération γ :

$$(VII-16) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r} [1 + av \cos \theta + bv^2 \sin^2 \theta + cv^2 \cos^2 \theta] - \frac{q_1 q_2}{r} M \gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r} [dv \sin \theta + ev^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{q_1 q_2}{r} N \gamma \sin \varphi \end{cases}$$

termes du premier degré en v :

$$\text{condition C/P 1} \dots \dots \dots a + d = 0$$

termes en v^2 :

$$\text{condition C/E} \dots \dots \dots c = -\frac{3}{2} \quad e = 2b$$

termes en γ et en v^2 :

$$\text{condition CV/E} \dots \dots \dots M = 1$$

$$\text{condition C/P 2} \dots \quad N = -b \quad \text{et} \quad M = 1.$$

Ces quatre conditions étant admises (qui se réduisent à trois du fait que CV/E résulte de C/P 2), il reste encore inconnus un coefficient (a , par exemple)

des termes du premier degré en v ainsi que le coefficient b , soit :

$$(VII-17) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + av \cos \theta + bv^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{2} v^2 \cos^2 \theta \right] - \frac{q_1 q_2}{r} \gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[-av \sin \theta + 2bv^2 \sin \theta \cos \theta \right] + \frac{q_1 q_2}{r} b \gamma \sin \varphi \end{cases}$$

qui peut aussi se mettre sous la forme (VII-14) :

$$\bar{f} = -q_1 q_2 \left[-\overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-a\bar{u} + \bar{v}_r - b\bar{v}_n}{r} \right) \right].$$

NOTA CONCERNANT LA LOI CLASSIQUE. — Nous verrons au chapitre suivant que pour obtenir l'expression de la loi classique (limitée aux termes en $\frac{1}{c^2}$), il faut prendre $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$, d'où :

$$\bar{f} = -q_1 q_2 \left[-\overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}_r + \frac{1}{2} \bar{v}_n}{r} \right) \right].$$

On vérifie facilement que cette expression est identique à la suivante :

$$\bar{f} = -q_1 q_2 \frac{\bar{r}}{r^3} - q_1 q_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{\bar{r}}{r^2} \frac{d\bar{r}}{dt} \right) \right]$$

qui a été obtenue par M. REULOS par application de sa méthode d'intégration des équations de MAXWELL ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ René REULOS, *Thèse*, Paris, 1937, page 79 (réf. 5).

CHAPITRE VIII

LOI D'INTERACTION EN FONCTION DES POSITIONS RETARDÉES

§ 1. Introduction

Afin de poursuivre la recherche des valeurs des coefficients encore inconnus de la loi particulière, il est nécessaire maintenant d'exprimer cette loi en fonction de la position retardée de la particule influençante accélérée. Nous verrons en effet que cela nous permettra de faire intervenir une nouvelle condition expérimentale, celle résultant de l'influence d'une particule oscillante.

§ 2. Calcul de l'influence en fonction de la position retardée

Soit une particule fixe F à l'origine et une particule mobile dont la position actuelle est G et la position retardée G_0 . Nous nous bornerons au cas du plan, pour simplifier, ce qui revient à admettre que l'accélération $\bar{\gamma}$ se trouve dans le plan du rayon vecteur et de la vitesse, autrement dit que les plans $(\bar{r}, \bar{v})$ et $(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$ sont confondus.

La force qui s'exerce sur F est, d'après (V-11) et (VII-1) :

$$(VIII-1) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - av \cos \theta + (b+1) v^2 \sin^2 \theta \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \left(c + \frac{1}{2} \right) v^2 \cos^2 \theta \right] - \frac{q_1 q_2}{r} M \gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[-dv \sin \theta + (e+1) v^2 \sin \theta \cos \theta \right] - \frac{q_1 q_2}{r} N \gamma \sin \varphi. \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer r , v , θ , γ et φ en fonction de leurs valeurs retardées. Tout d'abord, notons qu'on peut écrire :

$$\gamma \sin \varphi \sim \gamma_0 \sin \varphi_0 \qquad \gamma \cos \varphi \sim \gamma_0 \cos \varphi_0$$

puisque'il est sous-entendu que γ est en fait $\frac{\gamma'}{c^2}$, d'où :

$$(VIII-2) \quad \gamma \sim \gamma_0 \quad \text{et} \quad \varphi \sim \varphi_0.$$

Ceci étant, la courbe (fig. 19) suivie par le point G à partir de G_0 est définie par :

$$(VIII-3) \quad \begin{cases} x = r_0 + v_0 t \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 \cos \varphi_0 \\ n_0 = v_0 t \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 \sin \varphi_0. \end{cases}$$

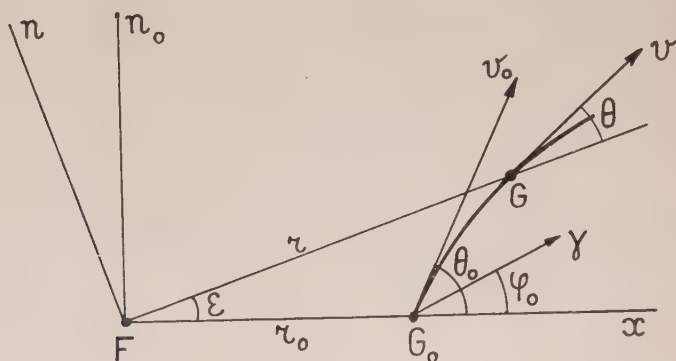


Fig. 19

Le rayon r à l'instant $t = \frac{r_0}{c} = r_0$ est donc donné par :

$$(VIII-4) \quad r^2 = r_0^2 (1 + 2 v_0 \cos \theta_0 + v_0^2 + \gamma_0 r_0 \cos \varphi_0)$$

et l'angle ε entre r et r_0 est défini par :

$$(VIII-5) \quad \begin{cases} \cos \varepsilon = \frac{x}{r} \sim 1 - \frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \theta_0 \\ \sin \varepsilon = \frac{n_0}{r} \sim v_0 \sin \theta_0 - v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 r_0 \sin \varphi_0. \end{cases}$$

D'autre part, la dérivation de (VIII-3) donne :

$$\begin{cases} v \cos (\theta + \varepsilon) = v_0 \cos \theta_0 + \gamma_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ v \sin (\theta + \varepsilon) = v_0 \sin \theta_0 + \gamma_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$(VIII-6) \quad \begin{cases} v \cos \theta = v_0 \cos \theta_0 + v_0^2 \sin^2 \theta_0 + \gamma_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ v \sin \theta = v_0 \sin \theta_0 - v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \gamma_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

En portant (VIII-2), (VIII-4) et (VIII-6) dans (VIII-1), on obtient :

$$\text{VIII-7) } \left\{ \begin{aligned} f_r &= -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} \left[1 - (a+2) v_0 \cos \theta_0 + (b-a) v_0^2 \sin^2 \theta_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(c + \frac{7}{2} + 2a \right) v_0^2 \cos^2 \theta_0 \right] - \frac{q_1 q_2}{r_0} (M-a-1) \gamma_0 \cos \varphi_0. \\ f_n &= -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} [-dv_0 \sin \theta_0 + (e+1+3d) v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] \\ &\quad - \frac{q_1 q_2}{r_0} (N-d) \gamma_0 \sin \varphi_0. \end{aligned} \right.$$

Il reste maintenant à évaluer la force f par ses projections suivant r_0 et n_0 l'aide de :

$$\text{VIII-8) } \left\{ \begin{aligned} f_{r_0} &= f_r \cos \varepsilon - f_n \sin \varepsilon \\ f_{n_0} &= f_r \sin \varepsilon + f_n \cos \varepsilon \end{aligned} \right.$$

ce qui conduit finalement à :

$$\text{VIII-9) } \left\{ \begin{aligned} f_{r_0} &= -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} \left[1 - (a+2) v_0 \cos \theta_0 + \left(b-a+d-\frac{1}{2} \right) v_0^2 \sin^2 \theta_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(c + \frac{7}{2} + 2a \right) v_0^2 \cos^2 \theta_0 \right] - \frac{q_1 q_2}{r_0} (M-a-1) \gamma_0 \cos \varphi_0 \\ f_{n_0} &= -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} [-(d-1) v_0 \sin \theta_0 + (e-2-a+3d) v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] \\ &\quad - \frac{q_1 q_2}{r_0} \left(N-d+\frac{1}{2} \right) \gamma_0 \sin \varphi_0. \end{aligned} \right.$$

§ 3. Calcul des coefficients de la loi classique à partir de la force relativiste

Avant d'aller plus loin, il est utile d'examiner comment s'exprime la loi classique sous forme particulière. Le calcul va d'abord être effectué à partir de la force relativiste classique exercée par une particule fixe G sur une particule mobile non accélérée F.

On sait que la force relativiste $\bar{\Phi}$ qui s'exerce sur une particule mobile F située à la distance r de la particule fixe est centrale et a pour valeur :

$$\bar{\Phi} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \bar{u}$$

ce qui est la même que si la particule F était fixe). En projetant cette force suivant la direction de la vitesse et normalement à la vitesse, les accélérations correspondantes sont :

$$\gamma_T = \frac{\Phi \cos \theta}{m_T} \quad \gamma_N = \frac{\Phi \sin \theta}{m_N}$$

m_T et m_N sont les masses longitudinale et transversale :

$$m_T = m_0 (1 - v^2)^{-3/2} \quad m_N = m_0 (1 - v^2)^{-1/2}.$$

où, en se bornant aux termes du second ordre :

$$= -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} (\bar{u}_0 + \bar{v}) (1 - 3 v_0 \cos \theta_0 - v_0^2 \sin^2 \theta + 5 v_0^2 \cos^2 \theta) - \frac{q_1 q_2}{r_0} (\bar{\gamma} - \bar{u}_0 \gamma \cos \varphi)$$

et finalement, en projetant suivant le rayon vecteur retardé, de vecteur unitaire $\bar{u}_0$, et suivant sa normale :

$$\text{VIII-10)} \quad \begin{cases} f_{r_0} = -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} [1 - 2 v_0 \cos \theta_0 - v_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2 v_0^2 \cos^2 \theta_0] \\ f_{n_0} = -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} [v_0 \sin \theta_0 - 3 v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] - \frac{q_1 q_2}{r_0} \gamma_0 \sin \varphi_0. \end{cases}$$

La comparaison avec (VIII-9) donne alors :

$$\text{VIII-11)} \quad \begin{cases} a = 0 & d = 0 & b = -\frac{1}{2} & c = -\frac{3}{2} & e = -1 \\ M = 1 & N = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On vérifie bien que, comme il se doit, la loi classique satisfait aux conditions C/P 1, C/P 2, C/E, CV/E.

§ 5. Influence d'une particule oscillante

Revenons maintenant à l'expression générale de la force qui s'exerce sur la particule F en fonction de la position retardée de la particule G, c'est-à-dire aux relations (VIII-9) qui peuvent s'écrire, en prenant de nouvelles notations :

$$\text{VIII-12)} \quad \begin{cases} f_{r_0} = -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} [1 + A_0 v_0 \cos \theta_0 + B_0 v_0^2 \sin^2 \theta_0 + C_0 v_0^2 \cos^2 \theta_0] - \frac{q_1 q_2}{r_0} P \gamma_0 \cos \varphi_0 \\ f_{n_0} = -\frac{q_1 q_2}{r_0^3} [D_0 v_0 \sin \theta_0 + E_0 v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] - \frac{q_1 q_2}{r_0} Q \gamma_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

ou, en fonction de la position actuelle de G (relations VIII-1) :

$$\text{VIII-13)} \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + A v \cos \theta + B v^2 \sin^2 \theta + C v^2 \cos^2 \theta] - \frac{q_1 q_2}{r} M \gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [D v \sin \theta + E v^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{q_1 q_2}{r} N \gamma \sin \varphi. \end{cases}$$

Les coefficients ($A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, P, Q$) sont fonctions linéaires des coefficients (A, B, C, D, E, M, N) qui sont eux-mêmes fonctions linéaires des coefficients (a, b, c, d, e, M, N). Or les conditions C/P 1, C/P 2 (qui comprend CV/E)

et C/E ont fourni cinq relations entre ces coefficients, comme il a été dit au paragraphe 10 du chapitre VII.

Il reste donc à établir deux relations nouvelles. Celles-ci nous seront fournies par le calcul de l'influence exercée par une particule oscillante située à une distance suffisamment grande de la particule fixe.

Il est à noter que ce calcul doit être effectué en partant de la relation (VIII-12), c'est-à-dire en fonction des positions retardées et non à partir de la relation (VIII-13). Ces dernières, qui sont exprimées en fonction des positions actuelles, sont en effet inapplicables dans le cas présent, car elles ne sont valables qu'au cas où les valeurs de γ , $\dot{\gamma}$, etc., et de r , sont telles que le mouvement de la particule mobile entre la position retardée et la position actuelle peut être assimilé avec une approximation suffisante, à un mouvement uniformément accéléré. Or il n'en est rien dans le cas de la particule oscillante, car on est alors conduit à ne considérer que le cas où r est suffisamment grand pour que la particule mobile effectue de nombreuses oscillations pendant le parcours de l'influence depuis le point source jusqu'au point influencé.

Dans ces conditions, le calcul (effectué en annexe) conduit au résultat suivant :

— influence d'une oscillation dirigée suivant le rayon vecteur :

$$\begin{cases} f_{r_0} \sim f_x \sim -\frac{q_1 q_2}{r_0} P \gamma_0 \\ f_{n_0} \sim f_y \sim 0 \end{cases}$$

— influence d'une oscillation dirigée perpendiculairement au rayon vecteur :

$$\begin{cases} f_{r_0} \sim f_x \sim 0 \\ f_{n_0} \sim f_y \sim -\frac{q_1 q_2}{r_0} Q \gamma_0. \end{cases}$$

Or la loi classique, comme on peut le voir par les relations (VIII-10), conduit à :

$$(VIII-14) \quad P = 0 \quad Q = 1$$

c'est-à-dire que la force sur F due à l'accélération de G est perpendiculaire au rayon vecteur retardé $\bar{r}_0$.

Dans ces conditions, nous appellerons « condition ACC », la condition représentée par les relations (VIII-14), par laquelle une loi particulière conduit aux mêmes résultats que la loi classique en ce qui concerne l'influence d'une particule oscillante. En fonction des coefficients de la loi particulière exprimée avec les éléments actuels et non plus retardés, cette condition s'écrit, d'après les derniers termes de la relation (VIII-9) :

$$(VIII-15) \quad \begin{cases} P = M - a - 1 = 0 \\ Q = N - d + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} M = a + 1 \\ N = d + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La validité de cette condition n'est fondée que dans la mesure où l'on estime que les résultats expérimentaux confirment les relations (VIII-14).

§ 6. Conclusions relatives aux données expérimentales

L'ensemble des conditions :

$$\text{VIII-16)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{C/P 1} \dots\dots\dots & a + d = 0 & \\ \text{C/E} \dots\dots\dots & c = -\frac{3}{2} & e = 2b \\ \text{CV/E} \dots\dots\dots & M = 1 & \\ \text{C/P 2} \dots\dots\dots & N + b = 0 & M = 1 \\ \text{ACC} \dots\dots\dots & M = a + 1 & N = d + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

permet de déterminer tous les coefficients de la loi particulière et conduit aux valeurs (VIII-11) définissant la loi classique, *qui est ainsi démontrée à partir des données expérimentales.*

En fait, en nous fixant une limite à la précision de ces données, nous avons été conduits à exprimer la loi particulière par un développement en série borné aux termes en $\frac{1}{c^2}$. L'établissement de l'expression complète de la loi classique, évidemment invérifiable expérimentalement dans sa totalité, nécessite l'inter-vention d'un postulat supplémentaire (celui de l'existence d'un champ), ainsi que nous le verrons plus loin.

§ 7. Sources fictives d'influence

Sur la ligne d'univers (G) de la particule influençante, la source d'influence qui agit sur la position actuelle F de la particule influencée est la position G_0 qui correspond à une vitesse de propagation égale à c depuis G_0 jusqu'à F (fig. 20).

Il a été souligné, au premier paragraphe du chapitre VII, que lorsque le mouvement de G était continu, aucune position de G n'était privilégiée à

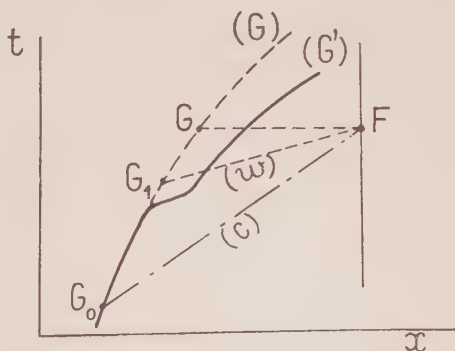


Fig. 20

ce point de vue, à savoir que l'on pouvait toujours considérer comme source un point quelconque G_1 de la ligne d'univers (G). Mais il faut alors admettre en contrepartie une vitesse de propagation w différente de c .

Il n'en reste pas moins que G_1 ne sera qu'une *source fictive*, car une perturbation entre G_0 et G_1 donnant lieu à une nouvelle ligne d'univers (G') ne modifierait pas l'influence sur F. En conséquence, si la ligne d'univers effectivement suivie est (G'), il faudra dire que l'influence sur F *semble* provenir du point fictif G_1 .

L'intérêt de la notion de source fictive réside en ce que l'expression de l'influence exercée sur F peut être plus simple ou plus commode lorsqu'on l'exprime en fonction des éléments cinématiques caractérisant cette source.

En particulier, dans tous les calculs qui précèdent, les expressions des conditions C/P 1, C/P 2, C/E et CV/E (mais non la condition ACC) ont été établies à partir des positions actuelles. Elles ne seraient donc valables que pour les circuits C pour lesquels les coordonnées des charges mobiles et leurs dérivées successives par rapport au temps varient d'une façon continue, car ce n'est que dans ce cas que les positions actuelles seraient confondues avec des sources fictives correspondant à une vitesse de propagation infinie. Or, pour de tels circuits, on aurait évidemment obtenu les mêmes expressions pour les diverses conditions si l'on était parti des positions retardées correspondant à la vitesse c de propagation de l'influence. Il s'ensuit que ces mêmes expressions ont un caractère général et sont applicables même si l'une des dérivées avait été discontinue après l'émission de l'influence considérée. Cette conclusion peut d'ailleurs être vérifiée par un calcul direct.

Ceci étant, on peut se demander s'il n'existe pas d'autres sources fictives que les positions actuelles, qui présenteraient de l'intérêt. En particulier, nous allons établir l'expression de la loi particulière pour une source fictive correspondant à une vitesse de propagation égale à celle des ondes de DE BROGLIE.

§ 8. Calcul de la loi particulière en fonction de la source fictive correspondant à une vitesse de propagation quelconque de l'influence.

La position G_1 de la source fictive sera définie par la condition que la vitesse de propagation de l'influence de G_1 à F ait une valeur donnée w (pour $w = c$, on retrouve la position G_0). Le calcul sera mené de la même façon qu'au chapitre VII, où était seul envisagé le cas $w = c = 1$.

Les relations (VIII-1), (VIII-2) et (VIII-3) restent valables en remplaçant l'indice « 0 » par l'indice « 1 ». Mais on prendra maintenant :

$$(VIII-17) \quad t = \frac{r_1}{w}$$

ce qui conduit pour (VIII-4) à :

$$(VIII-18) \quad r^2 = r_1^2 \left(1 + 2 \frac{v_1}{w} \cos \theta_1 + \frac{v_1^2}{w^2} + \gamma \frac{r_1}{w^2} \cos \varphi \right)$$

pour (VIII-5) à :

$$\text{VIII-19) } \left\{ \begin{array}{l} \cos \varepsilon_1 \sim 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{w^2} \sin^2 \theta_1 \\ \sin \varepsilon_1 \sim \frac{v_1}{w} \sin \theta_1 - \frac{v_1^2}{w^2} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \gamma \frac{r_1}{w^2} \sin \varphi \end{array} \right.$$

et pour (VIII-6) à :

$$\text{VIII-20) } \left\{ \begin{array}{l} v \cos \theta = v_1 \cos \theta_1 + \frac{v_1^2}{w} \sin^2 \theta_1 + \gamma \frac{r_1}{w} \cos \varphi \\ v \sin \theta = v_1 \sin \theta_1 - \frac{v_1^2}{w} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \gamma \frac{r_1}{w} \sin \varphi \end{array} \right.$$

d'où finalement, pour (VIII-9), à :

$$\text{VIII-21) } \left\{ \begin{array}{l} f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} \left[1 - \left(a + \frac{2}{w} \right) v_1 \cos \theta_1 \right. \\ \quad \left(b + 1 - \frac{a}{w} + \frac{d}{w} - \frac{3}{2} \frac{1}{w^2} \right) v_1^2 \sin^2 \theta_1 + \left(c + \frac{1}{2} + \frac{2}{w} + \frac{3}{w^2} \right) v_1^2 \cos^2 \theta_1 \Big] \\ \quad \left. - \frac{1}{r_1} \left(M - \frac{a}{w} - \frac{1}{w^2} \right) \gamma \cos \varphi \right. \\ f_{n_1} = -\frac{1}{r_1} \\ \quad \left[- \left(d - \frac{1}{w} \right) v_1 \sin \theta_1 + \left(e + 1 - \frac{a}{w} + \frac{3d}{w} - \frac{3}{w^2} \right) v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \right] \\ \quad \left. - \frac{1}{r_1} \left(N - \frac{d}{w} + \frac{1}{2w^2} \right) \gamma \sin \varphi. \right. \end{array} \right.$$

On vérifie bien que, pour une vitesse de propagation w infinie, on retrouve (VIII-1) et que, pour $w = 1$, on retrouve (VIII-9).

§ 9. Cas de la vitesse de propagation des ondes de De Broglie

La vitesse de la source fictive G_1 étant définie par (v_1, θ_1) , la vitesse de propagation de l'onde associée, qui sera désignée par w , a pour valeur :

$$\text{VIII-22) } w = - \frac{c^2}{v_1 \cos \theta_1}$$

Il ne faut pas omettre le signe « moins » qui résulte des dispositions de la fig. 19. En particulier, si $\cos \theta_1 > 0$, la particule influençante s'éloigne et dans ce cas l'onde associée *semble se diriger vers cette particule* au lieu d'en émaner).

En remplaçant par conséquent $\frac{1}{w}$ par $-v_1 \cos \theta_1$ dans les relations précédentes, on obtient :

$$\text{VIII-23) } r^2 = r_1^2 (1 - 2 v_1^2 \cos^2 \theta_1)$$

$$(VIII-24) \quad \begin{cases} \cos \varepsilon_1 \sim 1 \\ \sin \varepsilon_1 \sim -v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$(VIII-25) \quad \begin{cases} v \cos \theta = v_1 \cos \theta_1 \\ v \sin \theta = v_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

d'où finalement :

$$(VIII-26) \quad \begin{cases} f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} \left[1 - av_1 \cos \theta_1 + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 + \left(c + \frac{5}{2} \right) v_1^2 \cos^2 \theta_1 \right] \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{r_1} M \gamma \cos \varphi \\ f_{n_1} = -\frac{1}{r_1^2} [-dv_1 \sin \theta_1 + ev_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] - \frac{1}{r_1} N \gamma \sin \varphi. \end{cases}$$

§ 10. Conditions expérimentales partielles

On a vu que si la totalité des conditions figurant au tableau (VIII-16) sont considérées comme vérifiées expérimentalement d'une façon certaine, on en déduit pour les coefficients de la loi particulière, les valeurs (VIII-11) qui correspondent à la loi classique.

Or on peut être amené à penser que sont insuffisamment fondées faute d'expérimentation précise ⁽¹⁾, les deux conditions suivantes :

1° La condition C/P 2 à cause de la petitesse de l'effet éventuel produit (voir chap. VII, § 7, 4°). Cette condition est formée de deux relations, dont la seconde ($M = 1$) n'est autre que la condition CV/E qui est vérifiée. Il ne reste donc à éliminer que la première de ces relations, soit $N + b = 0$.

2° L'une des conditions ACC. Ces conditions sont :

$$P = M - a - 1 = 0$$

$$Q = N - d + \frac{1}{2} = 1.$$

Nous admettons que la valeur $P = 0$ est vérifiée expérimentalement (pas d'influence d'une charge oscillante dans la direction de son oscillation) mais que $Q = 1$ n'est pas vérifiée quantitativement, à savoir que l'on a vérifié une influence transversale d'une charge oscillante (c'est-à-dire qu'il est certain que Q est différent de zéro), mais seulement l'ordre de grandeur de cette influence (c'est-à-dire que Q pourrait être différent de 1 tout en étant voisin de cette valeur).

Si par conséquent on admet $P = 0$, comme d'autre part on a admis $M = 1$, il en résulte que $a = 0$. La condition C/P 1 conduit alors à $d = 0$ et finalement

(1) On peut alors se demander comment la loi classique a été choisie, puisque les données expérimentales sont insuffisantes. Nous verrons plus loin (Chap. IX) que c'est en faisant intervenir un nouveau postulat, celui de l'existence d'un champ.

la seconde condition ACC se réduit à $Q = N + \frac{1}{2} = 1$. D'après ce qui a été dit, nous ne conserverons que la relation $Q = N + \frac{1}{2}$ sans exiger de ses deux membres qu'ils soient égaux à 1.

En définitive, nous obtenons le tableau suivant :

$$(VIII-27) \left\{ \begin{array}{lll} a = 0 & d = 0 & (C/P \text{ 1 vérifiée}) \\ c = -\frac{3}{2} & e = 2b & (C/E \text{ vérifiée}) \\ M = 1 & & (CV/E \text{ vérifiée, ainsi qu'une des conditions} \\ & & C/P \text{ 2 et une des conditions ACC}) \end{array} \right.$$

et il reste deux coefficients indépendants inconnus : b et N .

Nous allons donc écrire à nouveau les expressions que prend la loi particulière pour différentes sources fictives, mais en tenant compte des résultats expérimentaux partiels rassemblés en (VIII-27). Cependant, pour plus de clarté, nous ne remplacerons pas M par sa valeur, étant sous-entendu que l'on sait que $M = 1$.

§ 11. Expressions des lois particulières avec les conditions expérimentales partielles

Les relations (VIII-1), (VIII-26) et (VIII-9) s'écrivent alors :

$$(VIII-28) \left\{ \begin{array}{l} f_r = -\frac{1}{r^2} [1 + (b+1) v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta] - \frac{1}{r} M \gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{1}{r^2} [(2b+1) v^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{1}{r} N \gamma \sin \varphi \end{array} \right.$$

$$(VIII-29) \left\{ \begin{array}{l} f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} [1 + (b+1) v_1^2 \sin^2 \theta_1 + v_1^2 \cos^2 \theta_1] - \frac{1}{r_1} M \gamma \cos \varphi \\ f_{n_1} = -\frac{1}{r_1^2} [2b v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] - \frac{1}{r_1} N \gamma \sin \varphi \end{array} \right.$$

$$(VIII-30) \left\{ \begin{array}{l} f_{r_0} = -\frac{1}{r_0^2} \left[1 - 2v_0 \sin \theta_0 + \left(b - \frac{1}{2} \right) v_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2v_0^2 \cos^2 \theta_0 \right] \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{r_0} (M-1) \gamma \cos \varphi \\ f_{n_0} = -\frac{1}{r_0^2} [v_0 \sin \theta_0 + 2(b-1) v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] - \frac{1}{r_0} \left(N + \frac{1}{2} \right) \gamma \sin \varphi \end{array} \right.$$

et d'autre part on établit facilement en exprimant (VIII-28) et (VIII-29) en fonction de (r, v_0, θ_0) :

$$(VIII-31) \left\{ \begin{array}{l} f_r = -\frac{1}{r_0^2} [1 - 2v_0 \cos \theta_0 + b v_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2v_0^2 \cos^2 \theta_0] \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{r_0} (M-1) \gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{1}{r_0^2} [(2b+1) v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] - \frac{1}{r_0} N \gamma \sin \varphi \end{array} \right.$$

$$(VIII-32) \quad \begin{cases} f_{r_1} = -\frac{1}{r_0^2} [1 - 2v_0 \cos \theta_0 + bv_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2v_0^2 \cos^2 \theta_0] \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{r_0} (M-1) \gamma \cos \varphi \\ f_{n_1} = -\frac{1}{r_0^3} [2bv_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] - \frac{1}{r_0} N \gamma \sin \varphi. \end{cases}$$

a. CAS OÙ L'ACCÉLÉRATION EST NULLE. — Si $b = -\frac{1}{2}$ (loi classique), la force est dirigée suivant r , vers la position actuelle G de la particule influençante, comme le montrent les relations (VIII-28) :

$$(VIII-33) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f_n = 0 \end{cases}$$

Si $b = 0$, la force est dirigée suivant r_1 , donc vers la position retardée G_1 avec la vitesse de propagation $w = -\frac{v_1 \cos \theta_1}{c^2}$, comme le montrent les relations (VIII-29) :

$$(VIII-34) \quad \begin{cases} f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} (1 + v_1^2) \\ f_{n_1} = 0. \end{cases}$$

b. CAS OÙ LA VITESSE v_0 EST NULLE. — On utilisera les relations (VIII-30-31-32) dans lesquelles, en faisant $v_0 = 0$, on ne considère que le terme coulombien et le terme d'accélération. On tiendra compte de $M = 1$.

Si N était égal à $-\frac{1}{2}$ (donc si $Q = 0$), l'accélération de la source G_0 serait sans effet, d'après (VIII-30), ce qui n'est pas confirmé expérimentalement.

Si N était égal à 0, (donc si $Q = \frac{1}{2}$), la seconde condition ACC n'étant pas satisfaite) la force serait dirigée suivant r , d'après la relation (VIII-31), ou également suivant r_1 d'après la relation (VIII-32), à l'approximation admise.

Si N était égal à $+\frac{1}{2}$ (donc si $Q = 1$, loi classique) la force sera dirigée vers une position qui ne présente *a priori* pas de caractère particulier.

c. CAS GÉNÉRAL (VITESSE v_0 NON NULLE ET ACCÉLÉRATION NON NULLE) POUR $N = 0$. — Il résulte de ce qui précède que si l'on a $N = 0$, on est conduit aux conclusions suivantes :

— avec $b = -\frac{1}{2}$, la force totale est dirigée vers la position actuelle G de la particule (mais la condition C/P 2 n'est pas satisfaite puisque $b + N \neq 0$) et a pour valeur :

$$(VIII-35) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] - \frac{1}{r} \gamma \cos \varphi \\ \quad \quad \quad = -\frac{1}{2} \left[1 - 2v_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2v_0^2 \cos^2 \theta_0 \right] \\ f_n = 0 \end{cases}$$

— avec $b = 0$, la force totale est dirigée vers G_1 , position retardée avec vitesse de propagation w (et non c) et a pour valeur :

$$(VIII-36) \quad \begin{cases} f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} [1 + v_1^2] - \frac{1}{r_1} \gamma \cos \varphi = -\frac{1}{r_0} [1 - 2v_0 \cos \theta_0 + 2v_0^2 \cos^2 \theta_0] \\ f_{n_1} = 0. \end{cases}$$

Dans les deux cas, du fait de $M = 1$, les composantes f_r et f_{r_1} s'expriment en fonction de (r_0, v_0, θ_0) indépendamment de l'accélération. Celle-ci intervient implicitement dans la détermination de la direction de r ou de r_1 . En conséquence, pour des valeurs diverses de l'accélération, la force a toujours la même valeur en grandeur, mais seulement une direction différente du fait que les directions r ou r_1 diffèrent suivant $\bar{\gamma}$ pour une même direction $\bar{r}_0$.

§ 12. Comparaison de différentes lois particulières possibles

En définitive, bien que b et N soient inconnus, comme nous l'avons vu, si l'on ne tient compte que des conditions partielles (VIII-27), il n'en reste pas moins qu'on est amené à considérer plus particulièrement les cas $b = 0$, $b = -\frac{1}{2}$, $N = 0$, $N = +\frac{1}{2}$.

En rassemblant les résultats acquis, on obtient le tableau suivant :

	$b = -\frac{1}{2}$ (force due à la vitesse seule dirigée vers la position actuelle)	$b = 0$ (force due à la vitesse seule dirigée vers la position retardée correspondant à $w = -\frac{c^2}{v \cos \theta}$)
$N = 0$ $(Q = +\frac{1}{2})$ ACC non vérifiée	C/P 2 non vérifiée $(b + N = -\frac{1}{2})$ $f_r = -\frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] - \frac{1}{r} \gamma \cos \varphi$ $f_n = 0$	C/P 2 vérifiée $f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} [1 + v_1^2] - \frac{1}{r_1} \gamma \cos \varphi$ $f_{n_1} = 0$
$N = +\frac{1}{2}$ $(Q = +1)$ ACC vérifiée	C/P 2 vérifiée $f_r = -\frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] - \frac{1}{r} \gamma \cos \varphi$ $f_n = -\frac{1}{r} \frac{1}{2} \gamma \sin \varphi$ (loi classique)	C/P 2 non vérifiée $(b + N = -\frac{1}{2})$ $f_{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} [1 + v_1] - \frac{1}{r_1} \gamma \cos \varphi$ $f_{n_1} = -\frac{1}{r_1} \frac{1}{2} \gamma \sin \varphi$

En conclusion, on peut dire (en se bornant à ces quatre possibilités) que :

— si la condition C/P 2 est expérimentalement confirmée, il reste à déterminer si $Q = 1$ ou si $Q = \frac{1}{2}$.

— si la condition C/P 2 est expérimentalement infirmée, il est possible, en considérant que l'on est en présence d'une attraction ou d'une répulsion (puisque $b + N$ peut être égal soit à $+\frac{1}{2}$, soit à $-\frac{1}{2}$), de déduire dans quel cas on se trouve. La détermination expérimentale de la valeur de Q est alors une vérification supplémentaire.

ANNEXE AUX CHAPITRES V, VI, VII ET VIII

EXAMEN DES SOLUTIONS ANTÉRIEUREMENT PROPOSÉES
POUR LA LOI PARTICULAIRE

A titre purement indicatif, examinons brièvement quelques-unes des solutions proposées antérieurement, et signalées par H. ARZELIES⁽¹⁾.

Les auteurs de ces solutions ne sont pas relativistes, soit parce qu'ils n'admettent pas le principe de Relativité ou cherchent à s'en dégager, soit parce que leurs travaux sont antérieurs à la naissance de la Relativité (les auteurs relativistes admettent la loi particulière classique).

Aussi rappelons les résultats acquis aux chapitres I, II et III, dans le cadre non relativiste.

La loi élémentaire doit logiquement se mettre sous la forme des relations (I-4). Dans le cadre non relativiste, la condition FP doit être appliquée, et ces relations deviennent :

$$(III-8) \quad \begin{cases} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [2C \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 2B \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} [E \cos \theta_1 \sin \theta_2 + E \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta] \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} E \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta. \end{cases}$$

La loi particulière qui correspond à cette loi élémentaire est, en omettant les termes du premier degré en v :

$$(III-6) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + Bv^2 \sin^2 \theta + Cv^2 \cos^2 \theta] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [Ev^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{cases}$$

La condition C/C est :

$$(III-10) \quad 2B + C - E = -\frac{3}{2}.$$

(1) H. ARZELIES. — *La dynamique relativiste et ses applications*, fasc. I, § 138 et § 139.

Cet auteur donne un grand nombre de renseignements sur l'histoire de la question. Toutes les références que nous citerons dans cette annexe proviennent de cette source.

La condition C/E est :

$$(III-11) \quad \begin{cases} C = -\frac{1}{2} \\ E = 2B - 2. \end{cases}$$

La condition FC (forces centrales et égalité de l'action et de la réaction) est :

$$E = 0.$$

Ceci étant, examinons différentes expressions proposées, écrites avec nos notations habituelles.

1^o LOI ÉLÉMENTAIRE D'AMPÈRE ⁽¹⁾. — Cette loi correspond aux valeurs :

$$E = 0 \quad B = 1 \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Elle satisfait aux conditions C/E et FC.

2^o LOI ÉLÉMENTAIRE DE LAPLACE. — Cette loi ne rentre pas dans la forme générale des relations (III-8), car elle ne satisfait pas à la condition FP.

Il n'est donc pas possible de lui faire correspondre une loi particulière dans le cadre galiléen, mais nous avons vu que cela est possible dans le cadre relativiste. En effet, elle s'écrit :

$$\begin{cases} d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) \\ d^2 F_n = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^0} (-\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \eta) \\ d^2 F_p = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (-\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \eta) \end{cases}$$

et elle est un cas particulier $b = -\frac{1}{2}$ de la forme générale des relations (V-27). Elle correspond alors à la loi particulière classique.

Elle avait été signalée par AMPÈRE ⁽²⁾, mais rejetée par lui comme ne satisfaisant pas au principe de l'action et de la réaction.

Ces relations ont également été données par GRASSMAN, HANKEL et REYNARD.

3^o LOI ÉLÉMENTAIRE DE NEUMANN. — La loi élémentaire de NEUMANN revient à prendre :

$$2C = 1 \quad 2B = 1 \quad E = 0$$

⁽¹⁾ M. A. AMPÈRE. — *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience* (1827).

⁽²⁾ M. A. AMPÈRE. — *Mémoires sur l'Électrodynamique* (publiés par la Société française de Physique, Gauthier-Villars, 1887, t. III).

d'où :

$$d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta) = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2 \cos \varepsilon}{r^2}$$

qui fait apparaître l'angle ε entre les deux éléments.

Cette loi vérifie, comme nous l'avons vu au chapitre II, la condition FC d'une part et la condition E/C (donc la condition C/C).

HELMOLTZ a proposé une loi généralisant la précédente :

$$d^2 F_r = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} (\alpha \cos \varepsilon + \beta \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

qui ne vérifie d'ailleurs la condition C/C que si $3\alpha + \beta = 3$.

DUHEM⁽¹⁾ a signalé ces lois (ainsi que d'autres proposées par différents auteurs).

4^o LOI PARTICULAIRE DE GAUSS. — Cette loi est :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + v^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f_n = 0 \end{cases}$$

et revient donc à prendre :

$$B = 1 \quad C = -\frac{1}{2} \quad E = 0.$$

Cette loi vérifie à la fois la condition FC et la condition C/E. Elle est un cas particulier des relations (III-17), qui expriment toutes les lois particulières satisfaisant à C/E, et naturellement à FC puisque le cadre est galiléen. Elle conduit à la loi élémentaire d'AMPÈRE.

5^o LOI PARTICULAIRE DE WEBER. — Cette loi est :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{q_1 q_2}{r} \gamma \cos \varphi \\ f_n = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$B = 0 \quad C = -\frac{1}{2} \quad E = 0 \quad M = -1$$

Elle conduit à la loi élémentaire de NEUMANN.

(1) P. DUHEM. — *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*. 1892

6° LOI PARTICULAIRE DE RIEMAN. — Cette loi peut s'écrire :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta] - \frac{q_1 q_2}{r} 2\gamma \cos \varphi \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-2v^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{q_1 q_2}{r} 2\gamma \sin \varphi. \end{cases}$$

Elle ne vérifie aucune des conditions requises.

7° LOI PARTICULAIRE DE RITZ ⁽¹⁾. — Cette loi peut s'écrire :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + \frac{3-K}{4} v^2 \sin^2 \theta + \frac{K-1}{4} v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[-\frac{K+1}{4} v^2 \sin \theta \cos \theta \right] + \frac{q_1 q_2}{r} \gamma \sin \varphi \end{cases}$$

où K est à déterminer par l'expérience. Si l'on prend $K = -1$, on retrouve la loi particulière de GAUSS.

⁽¹⁾ W. RITZ. — « Recherches critiques sur l'électrodynamique générale » (*Ann. Chim. Phys.*, 1908, t. 13).

ANNEXE AU CHAPITRE VIII

INFLUENCE D'UNE PARTICULE OSCILLANTE

§ 1. Influence dans une direction perpendiculaire à la direction d'oscillation

La force qui s'exerce sur la particule F fixe à l'origine est définie en fonction de la position retardée G_0 par les relations (VIII-12), ce qui donne, avec les dispositions de la figure 21 et en prenant par commodité d'écriture $q_1 = q_2 = 1$:

$$\begin{cases} f_{r_0} = -\frac{1}{r_0^2} [1 + A_0 v_0 \sin \varepsilon + B_0 v_0^2 \cos^2 \varepsilon + C_0 v_0^2 \sin^2 \varepsilon] - \frac{1}{r_0} P \gamma_0 \sin \varepsilon \\ f_{n_0} = -\frac{1}{r_0^3} [D_0 v_0 \cos \varepsilon + E v_0^3 \sin \varepsilon \cos \varepsilon] - \frac{1}{r_0} Q \gamma_0 \cos \varepsilon. \end{cases}$$

Nous projeterons suivant les axes x et y en utilisant :

$$\begin{cases} f_x = f_{r_0} \cos \varepsilon - f_{n_0} \sin \varepsilon \\ f_y = f_{r_0} \sin \varepsilon + f_{n_0} \cos \varepsilon \end{cases}$$

et nous remplacerons $\frac{1}{r_0}$ par $\frac{\cos \varepsilon}{x}$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} f_x = -\frac{1}{x^2} \cos^2 \varepsilon \\ \quad [\cos \varepsilon + (A_0 - D_0) v_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon + (B_0 \cos^2 \varepsilon + C_0 \sin^2 \varepsilon - E_0 \sin^2 \varepsilon) v_0^2 \cos \varepsilon] \\ \quad - \frac{1}{x} (P - Q) \gamma_0 \sin \varepsilon \cos^2 \varepsilon \\ f_y = -\frac{1}{x^2} \cos^2 \varepsilon \\ \quad [\sin \varepsilon + (A_0 \sin^2 \varepsilon + D_0 \cos^2 \varepsilon) v_0 + (B_0 \cos^2 \varepsilon + C_0 \sin^2 \varepsilon + E_0 \cos^2 \varepsilon) v_0^2 \sin \varepsilon] \\ \quad - \frac{1}{x} (P \sin^2 \varepsilon + Q \cos^2 \varepsilon) \gamma_0 \cos \varepsilon. \end{cases}$$

En prenant convenablement l'origine des temps, l'oscillation d'amplitude $\mathcal{A}$ de la particule G est définie par :

$$y_0 = \mathcal{A} \sin \omega t.$$

On en déduit, en mettant en évidence l'infiniment petit principal $\alpha = \frac{\mathcal{A}_0}{x}$ et en se bornant au second ordre :

$$\cos \varepsilon = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \sin^2 \omega t}} \sim 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^2 \omega t$$

$$\sin \varepsilon = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \sin^2 \omega t}} \sim \alpha \sin \omega t.$$

En outre, en écrivant ω sous la forme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et en appelant λ la longueur d'onde correspondante qui est $\lambda = T$ (on a posé $c = 1$), on peut faire apparaître le rapport $\beta = \frac{\lambda}{x} = \frac{T}{x}$.

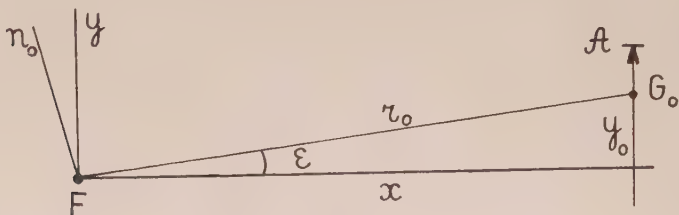


Fig. 21

On a alors :

$$\begin{cases} v_0 = -\mathcal{A}_0 \omega \cos \omega t = 2\pi \frac{\alpha}{\beta} \cos \omega t \\ \gamma_0 = \mathcal{A}_0 \omega^2 \sin \omega t = -\frac{1}{x} \frac{\alpha}{\beta^2} 4\pi^2 \sin \omega t. \end{cases}$$

Nous allons maintenant écrire les deux composantes de la force sur G en tenant compte des diverses relations ci-dessus.

On obtient, en se bornant au second ordre en :

$$\begin{cases} f_x \sim -\frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{3}{2} \alpha^2 \sin^2 \omega t + (A_0 - D_0) 2\pi \frac{\alpha^2}{\beta} \sin \omega t \cos \omega t + 4\pi^2 B_0 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos^2 \omega t \right] \\ \quad - (P - Q) 4\pi^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin^2 \omega t \\ f_y \sim -\frac{1}{x^2} \left[\alpha \sin \omega t + \frac{\alpha}{\beta} 2\pi D_0 \cos \omega t - 4\pi^2 \frac{\alpha}{\beta^2} Q \sin \omega t \right]. \end{cases}$$

Les valeurs de ces deux coordonnées vont dépendre de l'ordre de grandeur de β , c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de λ par rapport à x :

— si la longueur d'onde est très grande par rapport à la distance, ce qui correspond au cas des oscillations lentes, on peut écrire :

$$\begin{cases} f_x \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{3\alpha^2}{2x^2} \sin^2 \omega t = -\frac{1}{x^2} + \frac{3\lambda_0^2}{2x^4} \sin^2 \omega t \\ f_y \sim -\frac{\alpha}{x^2} \sin \omega t = -\frac{\lambda_0}{x^3} \sin \omega t. \end{cases}$$

— si la longueur d'onde et la distance sont du même ordre, tous les termes entre crochets sont à conserver :

— si la longueur d'onde est petite par rapport à la distance, on a :

$$\begin{cases} f_x \sim -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\alpha^2}{\beta^2} 4\pi^2 [B_0 \cos^2 \omega t - (P - Q) \sin^2 \omega t] \\ f_y \sim +\frac{1}{x^2} 4\pi^2 \frac{\alpha}{\beta^2} Q \sin \omega t = +\frac{1}{x} Q \lambda_0 \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

d'où, en se bornant au terme en α et en tenant compte que le terme $-\frac{1}{x^2}$ disparaît du fait que la particule oscillante est accompagnée d'une particule fixe de signe contraire :

$$\begin{cases} f_x \sim 0 \\ f_y \sim \frac{1}{x} Q \lambda_0 \omega^2 \sin \omega t = -\frac{1}{x} Q \gamma_0. \end{cases}$$

§ 2. Influence dans la direction de l'oscillation

Lorsque l'oscillation a lieu suivant l'axe x , l'influence sur la particule est alors définie par :

$$f_{r_0} = -\frac{1}{r_0^3} [1 + A_0 v_0 + C_0 v_0^2] - \frac{1}{r_0} P \gamma_0$$

avec :

$$r_0 = x + \lambda_0 \sin \omega t$$

d'où en négligeant les termes en α à partir du troisième ordre :

$$\begin{aligned} f_x \sim -\frac{1}{x^2} \left[1 - 2\alpha \sin \omega t + 3\alpha^2 \sin^2 \omega t + 2\pi A_0 \frac{\alpha}{\beta} \cos \omega t \right. \\ \left. - 4\pi A_0 \frac{\alpha^2}{\beta} \sin \omega t \cos \omega t + 4\pi^2 C_0 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos^2 \omega t \right] + \frac{1}{x^2} 4\pi^2 P \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \alpha \cos \omega t) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Si la longueur d'onde est grande par rapport à la distance, c'est-à-dire si $\frac{1}{\beta}$ est un infiniment petit, on a :

$$f_x \sim -\frac{1}{x^2} [1 - 2\alpha \sin \omega t] = -\frac{1}{x^2} + \frac{2\lambda_0}{x^3} \sin \omega t.$$

Si la longueur d'onde est de l'ordre de la distance, β est fini et l'on a en première approximation :

$$f_x \sim -\frac{1}{x^2} \left[1 - 2\alpha \sin \omega t + 2\pi A_0 \frac{\alpha}{\beta} \cos \omega t + 4\pi^2 P \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \omega t \right].$$

Si la longueur d'onde est très petite par rapport à la distance, β est un infiniment petit ⁽¹⁾, et l'on a :

$$f_x \sim -\frac{1}{x^2} \left[1 - 4\pi^2 P \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \omega t \right] = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} P \beta \omega^2 \sin \omega t$$

d'où finalement, en faisant abstraction du terme en $-\frac{1}{x^2}$, comme il a été dit plus haut :

$$\begin{cases} f_x \sim \frac{1}{x} P \beta \omega^2 \sin \omega t = \frac{1}{x} P \gamma_0 \\ f_y \sim 0. \end{cases}$$

§ 3. Conclusions

La valeur expérimentale de P et celle de Q ne peuvent donc être déterminées que si la distance x est très grande par rapport à la longueur d'onde λ ou, en d'autres termes, que si ω est suffisamment élevé pour x donné (cette valeur de x étant de toute façon choisie suffisamment grande par rapport à l'amplitude β).

⁽¹⁾ $\beta = \frac{T}{x}$ ne peut être infiniment petit d'ordre supérieur à $\alpha = \frac{\lambda}{x}$. En effet, la valeur maximum de v_0 , qui est $\beta \omega$, doit rester inférieur à 1, d'où $T > 2\pi \beta$.

CHAPITRE IX

ANALYSE DES NOTIONS DE FORCE ET DE MASSE

On pourrait se demander si l'emploi que nous avons fait de la notion de force effective ne restreint pas quelque peu la généralité des calculs. Nous allons voir qu'il n'en est rien, que d'autres définitions de la force sont possibles et nous allons montrer en particulier dans quelle mesure la définition classique de la force, habituellement adoptée, est liée à la notion de champ.

§ 1. Possibilité de différentes définitions de la force

Nous examinerons successivement les cas des particules :

- A. Fixes;
- B. En mouvement relatif, dans le cadre galiléen;
- C. En mouvement relatif, dans le cadre relativiste.

Dans chacun de ces cas, nous rechercherons :

- a. Les définitions qu'il est possible d'adopter pour la force sur une particule, d'où résulteront les formules de transformation de la force lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre;
- b. L'expression de l'interaction de deux particules identiques : il s'agit d'une loi physique indépendante dans son essence de la définition de la force, mais dont l'expression, dans sa forme, est liée à cette définition;
- c. L'expression de l'interaction de deux particules non identiques.

A. — Cas des particules fixes

a. FORCE SUR UNE PARTICULE ISOLÉE.

1. Au repos, une force est décelée par la déformation d'un système matériel, par exemple d'un ressort. On peut donc ainsi définir l'unité de force par la déformation d'un système donné (dynamomètre) sous l'influence, par

exemple, que la pesanteur exerce sur un volume donné de matière donnée en un lieu donné.

2. On constate que les forces s'ajoutent vectoriellement : on peut donc en particulier étalonner le dynamomètre.

3. On peut alors mesurer n'importe quelle force, soit directement à l'aide du dynamomètre étalonné, soit indirectement par la balance en l'opposant à une force connue (poids), elle-même définie par le dynamomètre de référence.

4. Lorsqu'une particule est en équilibre sous l'influence de deux forces égales et opposées et que l'on supprime une de ces forces, on constate que cette particule prend une certaine accélération. On constate également que cette accélération est indépendante de la nature de la force qui la provoque : des forces égales donnent à une particule des accélérations égales.

5. On constate que des forces différentes donnent à une particule donnée initialement fixe des accélérations différentes, proportionnelles à ces forces, et de même direction. On peut donc poser $\bar{F} = m_0 \gamma$ ce qui définit m_0 , masse au repos.

6. On constate que des forces égales appliquées successivement à des particules différentes initialement fixes, produisent des accélérations qui peuvent être différentes mais toujours dans la direction de ces forces. Donc m_0 est une caractéristique propre à chaque particule.

b. INTERACTION DE DEUX PARTICULES IDENTIQUES. — Les forces que deux particules identiques fixes exercent l'une sur l'autre sont centrales, égales et opposées. En effet, leur masse est la même et, par raison de réciprocité, les accélérations sont centrales, égales et opposées.

c. INTERACTION DE PARTICULES DIFFÉRENTES. — Les forces sont encore centrales, égales et opposées, puisqu'elles ne dépendent pas des masses des particules, et qu'elles le seraient si les masses étaient égales.

B. — Cas des particules mobiles dans le cadre galiléen

a. FORCE SUR UNE PARTICULE ISOLÉE.

1. Si l'on constate l'existence d'une accélération $\bar{\gamma}_v$ sur une particule de vitesse v et si l'on passe à un système de référence S_0 lié à la particule, on peut mesurer, dans ce système :

- la force F_0 , par le dynamomètre transporté par S_0 ;
- l'accélération $\bar{\gamma}_0$;

d'où la masse m_0 par $\bar{F}_0 = m_0 \bar{\gamma}_0$.

2. Pour repasser au système initial S :

— d'une part, l'accélération $\overline{\gamma}_v$ dans ce système est égale à $\overline{\gamma}_0$ puisque l'accélération est invariante dans une transformation de GALILÉE;

— d'autre part, il faut connaître les deux fonctions $\mu(v)$ et $f(v)$ figurant dans les relations suivantes (formules de transformation de la masse et de la force).

$$m_v = m_0 \times \mu(v) \quad \text{avec} \quad \mu(0) = 1$$

$$\overline{F}_v = \overline{F}_0 \times f(v) \quad \text{avec} \quad f(0) = 1$$

On est donc conduit, à partir de $\overline{F}_0 = m_0 \overline{\gamma}_0$, à

$$\overline{F}_v = m_v \overline{\gamma}_v \frac{f(v)}{\mu(v)}.$$

Or les deux fonctions $\mu(v)$ et $f(v)$ sont *arbitraires*.

Si, par exemple, comme on le fait habituellement, on prend *a priori* $f(v) = 1$ et $\mu(v) = 1$, c'est-à-dire force et masse invariantes, alors la loi de la dynamique a sa forme conservée.

Inversement, si l'on impose de conserver cette forme, choisir la masse comme invariante entraîne que la force est invariante, et réciproquement. Mais toute autre convention est aussi bien valable.

Autrement dit, même dans le cadre galiléen, on peut se donner *a priori* deux des trois fonctions suivantes :

$\mu(v)$ qui définit la variation de la masse avec la vitesse;

$f(v)$ qui définit la variation de la force avec la vitesse;

$\frac{f(v)}{\mu(v)}$ qui permet de définir la loi de la dynamique du point en mouvement.

Si, en fait, on prend la solution la plus simple $\mu = 1$ et $f = 1$, c'est uniquement par raison de commodité, puisqu'il s'agit de fonctions qui ne peuvent être déterminées par l'expérience.

b. INTERACTION DE DEUX PARTICULES IDENTIQUES.

1. Soit une particule (1) fixe et une particule (2) mobile, identiques et en interaction. La particule (1) a une accélération $\overline{\gamma}_1$ et la particule (2) une accélération $\overline{\gamma}_2$.

Si la particule (2) était fixe, elle provoquerait sur la particule (1) une accélération $\overline{\gamma}_0$ et elle-même aurait une accélération égale et opposée $-\overline{\gamma}_0$.

Rien ne permet d'établir par le raisonnement seul la relation qui existe entre $\overline{\gamma}_1$ et $\overline{\gamma}_0$ ni celle entre $\overline{\gamma}_2$ et $-\overline{\gamma}_0$. En effet, il s'agit là d'un phénomène physique. Il faut donc soit passer à l'expérience, soit partir d'une nouvelle hypothèse posée *a priori* ou vérifiée *a posteriori* par l'expérience.

2. Cependant, il existe une relation entre $\overline{\gamma}_1$ et $\overline{\gamma}_2$ comme conséquence du principe de réciprocité (résultant de la condition selon laquelle il n'y a pas de système privilégié).

En effet, en passant au système de référence S_2 , lié à la particule (2), on voit que cela revient à intervenir $\overline{\gamma}_1$ et $\overline{\gamma}_2$. Or ils sont invariants. Donc $\overline{\gamma}_1$ et $\overline{\gamma}_2$ sont égaux et opposés (mais on ignore leur lien avec $\overline{\gamma}_0$).

3. D'après ce qui a été dit ci-dessus en B-a) 2, si l'on choisit m invariant et si l'on pose $\overline{F}_v = m \overline{\gamma}_v$, alors on peut dire que les forces $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ sont égales et opposées (mais on ignore leur lien avec F_0 , d'où les coefficients A, B, C, D, E du chapitre III, à déterminer par l'expérience).

Il est essentiel de noter que rien ne dit que $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ sont centrales. L'affirmer serait introduire une condition supplémentaire qui empiète sur le domaine de l'expérience ⁽¹⁾. C'est en effet les relier à $\overline{F}_0$ qui est centrale.

c. INTERACTION DE DEUX PARTICULES DIFFÉRENTES.

1. Si la particule (2) n'est pas identique à la particule (1), l'accélération $\overline{\gamma}_2$ n'est plus égale en grandeur à l'accélération γ_1 . Toutefois, elle a une direction opposée à celle de γ_1 .

En effet, si on la remplace par une particule (3), identique à (1), $\overline{\gamma}_3$ sera égale et opposée à γ_1 , d'après ce qui a été dit en B-b.2. Si maintenant, on remplace (3) par (2), l'accélération ne change pas de direction, mais seulement de grandeur du fait de la masse, d'après A-a.6.

2. En conséquence, les forces $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ sont encore égales et opposées, chacune de ces forces étant évaluée dans le système propre à chaque particule. Si l'on a choisi la fonction $f(v)$ identique à 1, alors la force est invariante et les forces $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ sont toujours égales et opposées.

C. — Cas des particules mobiles en relativité

a. FORCE SUR UNE PARTICULE ISOLÉE.

1. Soit une particule mobile de vitesse v et d'accélération $\overline{\gamma}_v$.
Passons dans le système propre S_0 de la particule.

L'accélération a alors pour valeur $\overline{\gamma}_0$, donnée par les formules de transformation de la cinématique relativiste :

$$\begin{cases} (\gamma v)_T = (\gamma_0)_T \cdot g_T(v) \\ (\gamma v)_N = (\gamma_0)_N \cdot g_N(v) \end{cases}$$

⁽¹⁾ C'est pourquoi, dans les calculs effectués au chapitre III, nous avons été amenés à conserver le paramètre E. La loi d'AMPÈRE correspond à $E = 0$ en imposant *a priori* que la force est centrale (et en omettant les termes du premier degré en v).

que nous écrirons symboliquement :

$$(IX-1) \quad \gamma_v \div \gamma_0 \cdot g(v)$$

le signe $\div$ signifiant qu'il existe une telle relation pour la composante suivant la direction de la vitesse et d'autres relations analogues, mais non identiques, pour les composantes normales à la vitesse. Finalement, γ_0 dans S_0 est connu.

Quant à la force F_0 dans S_0 , on peut également la connaître par une mesure au dynamomètre transporté dans S_0 .

Ceci étant, nous connaissons, évaluée dans S_0 , la masse m_0 de la particule en mouvement, par la relation de définition :

$$\bar{F}_0 = m_0 \bar{\gamma}_0.$$

2. Pour repasser dans le système initial S , on écrira les formules de transformation :

$$(IX-2) \quad m_v \div m_0 \mu(v)$$

$$(IX-3) \quad F_v \div F_0 f(v)$$

d'où :

$$(IX-4) \quad F_v \div m_0 \gamma_0 f(v) \div m_v \gamma_v \frac{f(v)}{\mu(v) \cdot g(v)}$$

et l'on peut choisir *arbitrairement* les deux fonctions $\mu(v)$ et $f(v)$, ou encore l'une d'elles et une relation entre elles, ou enfin deux relations entre elles. En particulier, si l'on désire que la loi de la dynamique soit de la forme :

$$F_v \div m_v \gamma_v$$

il faut choisir la relation :

$$f(v) \div \mu(v) \cdot g(v).$$

Premier exemple (donnée de la masse et de la loi de la dynamique). — Classiquement, on définit la force par :

$$\bar{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \bar{v} \right)$$

d'où :

$$\bar{F}_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v} \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2}^3} \frac{dv}{dt}$$

et, en faisant apparaître par

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = (\bar{\gamma}_v)_T + (\bar{\gamma}_v)_N \quad \text{et} \quad \bar{v} \frac{dv}{dt} = \bar{v} (\gamma_v)_T = v (\bar{\gamma}_v)_T$$

les accélérations normale et tangentielle :

$$\bar{F}_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} (\bar{\gamma}_T)_N + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}^3} (\bar{\gamma}_v)_T.$$

Cela revient donc à choisir d'une part $\overline{F}_v = m_v \gamma_v$, et, d'autre part :

$$(m_v)_N = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \quad (m_v)_T = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2^3}}$$

c'est-à-dire les fonctions $\mu(v)$.

Comme les fonctions $g(v)$ sont, d'après la cinématique :

$$g_N(v) = 1 - v^2 \quad g_T(v) = \sqrt{1 - v^2^3}$$

et que l'on impose à la loi de la dynamique de conserver sa forme $F_v \div m_v \gamma_v$, ce qui correspond à :

$$f(v) \div \mu(v) \cdot g(v)$$

on en déduit alors :

$$f_N(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad f_T(v) = 1.$$

on trouve ainsi les formules de transformation de la force classique.

Deuxième exemple (donnée de la masse et de la loi de la dynamique). — Dans les calculs qui ont fait l'objet des chapitres V, VI, et VII, nous avons choisi :

$$\begin{cases} \mu(v) = 1 & (\text{masse invariante}). \\ F_v \div m_v \gamma_v \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que :

$$f(v) \div g(v).$$

La force (que nous avons alors appelée « force effective ») se transforme comme l'accélération.

Troisième exemple (donnée de la force et de la loi de la dynamique). — Au lieu de prendre la masse invariante, on aurait pu choisir la force invariante. Il suffit pour cela de poser :

$$f(v) = 1.$$

Si l'on veut également avoir :

$$F_v \div m_v \gamma_v \quad \text{d'où} \quad f(v) \div \mu(v) \cdot g(v)$$

alors il faut prendre :

$$\mu(v) = \frac{1}{g(v)}$$

c'est-à-dire :

$$(m_v)_N = \frac{m_0}{1 - v^2} \quad (m_v)_T = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2^3}}.$$

Quatrième exemple (donnée de la masse et de la force). — Prenons à la fois la masse et la force invariantes, d'où :

$$\mu(v) \equiv 1 \quad f(v) \equiv 1.$$

Cette convention conduisait à la loi la plus simple en non-relativité, mais il n'en est plus de même en relativité. En effet, dans ce cas, la loi de la dynamique serait différente suivant les composantes, puisqu'il faudrait écrire :

$$F_v \div m_v \gamma_v \frac{1}{g(v)}.$$

b. INTERACTION DE DEUX PARTICULES IDENTIQUES.

1. Soit une particule (1) fixe et une particule (2) mobile, identiques et en interaction. La particule (1) a une accélération $\overline{\gamma}_1$ et la particule (2) une accélération $\overline{\gamma}_2$.

Comme il a été dit plus haut, en B-b.1, on ne peut rien dire sur le rapport qu'il peut y avoir entre ces accélérations et celles qui se manifestent lorsque les particules sont au repos.

2. Par réciprocité, en se plaçant dans un système lié à la particule (2), on peut établir certains rapports entre les valeurs de $\overline{\gamma}_1$ et de $\overline{\gamma}_2$ (en prenant garde que les temps changent lorsqu'on change de système). C'est ce que nous avons fait au chapitre V, ce qui nous a permis en particulier de passer des relations (V-5) aux relations (V-6).

3. En ce qui concerne les forces, il n'y a pas en général égalité ni même parallélisme de l'action et de la réaction.

c. INTERACTION DE DEUX PARTICULES DIFFÉRENTES. — Rien de particulier à ajouter à ce qui précède, si ce n'est que dans ce cas le principe de réciprocité doit s'appliquer aux forces et non plus aux accélérations.

§ 2. Expression générale de la loi particulière dans le cas d'une définition quelconque de la force

Soient, avec les dispositions habituelles, une particule F fixe placée à l'origine et une particule G mobile (fig. 22).

Les forces sur F et G ont pour expression, d'après (V-5) et (V-6) :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - av \cos \theta + (b+1) v^2 \sin^2 \theta + \left(c + \frac{1}{2} \right) v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[-dv \sin \theta + (e+1) v^2 \sin \theta \cos \theta \right] \\ g_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - av \cos \theta + bv^2 \sin^2 \theta + cv^2 \cos^2 \theta \right] \\ g_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[dv \sin \theta - ev^2 \sin \theta \cos \theta \right]. \end{cases}$$

Afin de mettre en évidence les coefficients de la force sur F , qui sont indépendants de la définition adoptée pour la force puisque F est fixe, nous posons :

$$(IX-6) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + A v \cos \theta + B v^2 \sin^2 \theta + C v^2 \cos^2 \theta] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [D v \sin \theta + E v^2 \sin \theta \cos \theta] \end{cases}$$

(les nouveaux coefficients A, B, C, D, E , n'ont évidemment aucun rapport avec ceux utilisés aux chapitres non-relativistes III et IV), d'où inversement :

$$(IX-7) \quad \begin{cases} g_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + A v \cos \theta + (B - 1) v^2 \sin^2 \theta + \left(C - \frac{1}{2} \right) v^2 \cos^2 \theta \right] \\ g_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-D v \sin \theta - (E - 1) v^2 \sin \theta \cos \theta] \end{cases}$$

avec :

$$(IX-8) \quad A = -a \quad D = -d \quad B = b + 1 \quad C = c + \frac{1}{2} \quad E = e + 1.$$

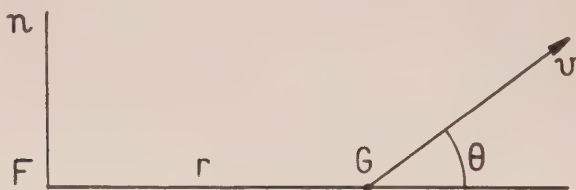


Fig. 22

Les relations (IX-6) peuvent être considérées comme constituant par elles-mêmes un postulat dont l'expression satisfait au principe de symétrie et qui englobe :

- le postulat suivant lequel la loi du Coulomb est vérifiée au repos;
- la condition b du paragraphe I du chapitre V, à savoir qu'il n'y a pas d'action instantanée à distance, c'est-à-dire qu'il existe des termes où apparaît le rapport $\frac{v}{c}$ (ces termes disparaissent pour c infini).

Les coefficients A, B, C, D, E , sont dans ces conditions de nature « physique », entendant par là qu'ils ne sont accessibles que par l'interprétation des résultats expérimentaux, à défaut de l'utilisation de nouveaux postulats. *Étant relatifs à une particule fixe, ils sont indépendants des conventions qui permettent comme on vient de le voir la définition de la force et celle de la masse d'une particule mobile.*

Ceci étant, et une fois que l'on a choisi ces définitions, c'est-à-dire en définitive les formules de transformation de la force et celles de la masse, la valeur de la force sur la particule mobile G s'obtiendra en appliquant :

— la condition a du paragraphe 1 du chapitre V : pas de système de référence privilégié, donc le principe de réciprocité;

— la condition c du paragraphe 1 du chapitre V : tout changement de système de référence se fera à l'aide de la transformation de LORENTZ.

C'est la marche qui a été suivie au chapitre V, où l'on a choisi pour définition celle de la force « effective ». Dans ce cas, la masse était invariante.

Examinons maintenant comment s'effectuerait ce même calcul dans le cas d'une définition quelconque de la force. Nous avons vu au paragraphe I C a ci-dessus que l'on pouvait toujours définir la force en choisissant arbitrairement deux relations, et en particulier :

$$\begin{cases} F_v \div m_v \gamma_v \\ m_v \div m_0 \mu(v) \end{cases}$$

où les fonctions $\mu(v)$ sont arbitraires. Comme en outre on peut montrer que ces fonctions sont de degré pair en v , nous écrirons, toujours en nous limitant au second degré en v :

$$(IX-9) \quad (m_v)_T = m_0 (1 + \lambda v^2) \quad (m_v)_N = m_0 (1 + \mu v^2)$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires.

Dans le cas particulier où l'on choisit $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ (masse invariante), la force $\bar{g}$ est une force effective et l'expression de ses composantes est représentée par les relations (IX-7).

Pour obtenir cette expression dans le cas où l'on utilise une définition quelconque de la force, il suffit, puisque $\bar{g} = m_0 \bar{\gamma}$:

- de projeter $\bar{g}$ sur la vitesse et sur la normale;
- de multiplier les expressions obtenues, respectivement par $1 + \lambda v^2$ et $1 + \mu v^2$;
- de reprojeter sur le rayon vecteur et sur sa normale.

On obtient finalement :

$$(IX-10) \quad \begin{cases} \text{force radiale} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + A v \cos \theta \right. \\ \quad \left. + (B - 1 + \mu) v^2 \sin^2 \theta + \left(C - \frac{1}{2} + \lambda \right) v^2 \cos^2 \theta \right] \\ \text{force normale} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[-D v \sin \theta - (E - 1 + \lambda - \mu) v^2 \sin \theta \cos \theta \right] \end{cases}$$

le module correspondant ayant pour valeur :

$$(IX-11) \quad \begin{cases} |\text{force}| = \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \left[1 + A v \cos \theta \right. \\ \quad \left. + \left(B - 1 + \mu + \frac{D^2}{2} \right) v^2 \sin^2 \theta + \left(C - \frac{1}{2} + \lambda + \frac{A}{2} \right) v^2 \cos^2 \theta \right]. \end{cases}$$

Dans ces relations, les coefficients A, B, C, D, E, sont *physiques* ainsi qu'il a été dit plus haut, les coefficients $-1, +\frac{1}{2}, +1$ sont *cinématiques* relativistes (ils seraient nuls en cinématique galiléenne), les coefficients λ et μ sont *arbitraires*.

Par exemple, en prenant $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire la définition habituelle des masses longitudinale et transversale, on exprime en langage de force classique, la loi particulière la plus générale. Au contraire, en prenant $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, on exprime en langage de force effective la loi particulière la plus générale (relation IX-7).

L'ensemble des valeurs des coefficients physiques constitue une loi physique, car il permet de décrire le phénomène observable qu'est l'accélération d'une particule mobile (relation IX-7) ou la force sur une particule fixe (relation IX-6).

Un changement quelconque des valeurs de λ ou de μ n'affecte évidemment pas l'expression (IX-6) de la force sur la particule fixe. L'expression (IX-10) de la force sur la particule mobile est changée, mais l'expression de l'accélération de cette particule ne l'est pas (elle est donnée par les relations (IX-7) dont chaque membre est à diviser par m_0).

§ 3. Expression de la condition de champ

A l'aide des relations (IX-10) et (IX-11), exprimons les conditions suivantes, relatives à la force sur la particule mobile :

— condition pour que la force $\bar{g}$ soit centrale :

$$\begin{cases} D = 0 \\ E = 1 = \mu - \lambda, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} d = 0 \\ e = \mu - \lambda; \end{cases}$$

— la condition pour que le module de la force $\bar{g}$ soit $\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B - 1 = -\mu - \frac{D^2}{2} \\ C - \frac{1}{2} = -\lambda - \frac{A^2}{2}, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -\mu - \frac{d^2}{2} \\ c = -\lambda - \frac{a^2}{2}. \end{cases}$$

Lorsque ces deux conditions sont remplies simultanément, on a :

$$(IX-12) \quad a=0 \quad d=0 \quad b=-\mu \quad c=-\lambda \quad e=\mu-\lambda$$

que nous écrirons sous la forme :

$$(IX-13) \quad a=0 \quad d=0 \quad e=c-b$$

$$(IX-14) \quad \lambda=-c \quad \mu=-b.$$

On exprime ainsi que la force exercée sur une particule mobile par une (ou plusieurs) particules fixes, est indépendante de l'état de mouvement (grandeur et direction de la vitesse) de la particule mobile et par conséquent est la même que si cette dernière était fixe, c'est-à-dire qu'il existe un champ $\bar{h}$ et que l'on a :

$$\bar{f} = q\bar{h},$$

$\bar{h}$ étant défini en tout point de l'espace à partir de la force exercée sur une particule fixe en ce point.

L'ensemble des relations (IX-13) et (IX-14) constitue donc les « conditions de champ » et sera désigné par « condition CH ». On est ainsi conduit aux conclusions suivantes :

1° La condition CH faisant intervenir des relations (relations IX-13) entre les coefficients physiques de la loi particulaire, *la notion de champ ne peut être considérée comme ayant un caractère axiomatique*, bien qu'elle ait toujours été admise comme telle, plus ou moins implicitement. Rien d'ailleurs n'autorise à généraliser aux particules mobiles une notion définie à partir d'une particule fixe. Du seul point de vue logique, cette condition peut ne pas être satisfaite.

Les lois particulières qui ne satisfont pas aux conditions (IX-13) sont en effet incompatibles avec la notion de champ, quelle que soit la définition adoptée pour la masse (et la force), c'est-à-dire quelle que soient les valeurs de λ et de μ .

2° Inversement, seules les lois particulières satisfaisant aux relations (IX-13) sont justiciables de la notion de champ, à condition toutefois d'admettre pour la masse (et la force) les conventions définies par les relations (IX-14). La loi classique n'est qu'une de ces lois et correspond à $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$.

3° Si maintenant on choisit *a priori* ces dernières valeurs de λ et de μ , la seule loi particulaire qui satisfasse alors aux conditions de champ est la loi classique. Autrement dit, lorsqu'on adopte la définition classique de la force et de la masse (1^{er} exemple du paragraphe 1 c ci-dessus), *le seul fait l'admettre qu'il existe un champ implique nécessairement la loi classique*.

Mais, comme nous venons de le voir, la notion de champ ne présente pas un caractère de nécessité logique et par conséquent ceci ne peut être considéré comme une démonstration de la loi classique, comme on le fait généralement.

4° Signalons enfin que si l'on admet à la fois la condition CH et la condition C/E, on obtient d'une part la loi particulière classique et d'autre part la définition classique pour la masse et la force.

NOTA. — Dans le cas particulier de l'influence d'un plan chargé indéfini sur une particule mobile, nous avons vu (chapitre VI, paragraphe 3) que le phénomène observable (déviations d'un faisceau électronique) était indépendant de la valeur de b , une fois la condition C/C remplie.

Puisque la notion de champ pourrait s'appliquer pour la valeur classique $b = -1/2$ il en résulte que *dans ce cas* cette notion s'applique aussi quelle que soit la valeur de b : il suffit de choisir une loi convenable ($\mu = -b$) pour la variation de la masse avec la vitesse.

Mais ici encore, la notion de champ n'est pas obligatoire. On pourrait dire aussi bien que la masse reste constante (c'est ce que nous avons fait par la considération de la force effective) et que la force varie avec la vitesse : nous avons vu qu'avec cette interprétation, la variation de force correspondait à la variation de densité superficielle des charges du plan, telle que cette densité est mesurée par un observateur lié à la particule mobile.

§ 4. Remarque relative à la notion de force

Le choix arbitraire de la définition (ou plus précisément des formules de transformation) de la force et de la masse, revient finalement à imputer à l'une ou l'autre de ces grandeurs (ou aux deux) tout ou partie de la variation de la valeur de l'accélération en fonction de la vitesse.

La variation de masse, quand les conventions admises font qu'elle existe, n'implique donc pas quelque variation interne des caractéristiques propres à la particule considérée : la « masse propre » reste évidemment constante.

De même, la force, par son degré d'arbitraire, doit être considérée seulement comme une fonction mathématique commode, et dépouillée de son contenu subjectif habituel qui la fait considérer comme étant « ce qui tire ».

Il faut s'en tenir au phénomène observable et mesurable qui est, en ce qui concerne une particule mobile :

— soit la courbure de la trajectoire, donc l'accélération par rapport au système fixe;

— soit la déformation du dynamomètre transporté par le système mobile, c'est-à-dire en définitive l'accélération mesurée dans le système mobile.

Il en résulte que finalement c'est la force effective qui serre de plus près la réalité physique (du moins avec les seules coordonnées d'espace; avec les coordonnées espace-temps, ce sera le quadrivecteur force absolue qui sera à considérer) puisqu'elle conserve à la masse sa valeur propre et qu'elle est égale à l'accélération à un facteur constant près.

Par contre, la force classique (ainsi que toute définition différente de celle de la force effective) ne doit pas être considérée comme étant « ce qui tire ». C'est seulement un outil de calcul, une fonction mathématique arbitraire. Si ce point est perdu de vue, il en résulte une source de confusion, dont voici un exemple.

Dans un système au repos S_0 , deux particules F et G sont fixes et à une distance mutuelle r_0 sur une droite oblique faisant un angle θ_0 par rapport à l'axe OX_0 . Les forces sont alors centrales et les accélérations également.

Par rapport à un système S mobile, ces particules ont une vitesse v suivant OX confondu avec OX_0 (fig. 23).

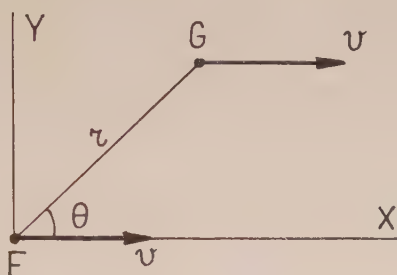


Fig. 23

Dans ces conditions, les forces effectives sont, d'après les relations (V-8) et (V-9) où l'on fait $v_1 = v_2$, $\theta_1 = \theta_2$, $\eta = 0$:

$$(IX-15) \quad \begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - v^2 \sin^2 \theta - \frac{5}{2} v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f_n = 0 \\ g_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - v^2 \sin^2 \theta - \frac{5}{2} v^2 \cos^2 \theta \right] \\ g_n = 0. \end{cases}$$

On voit que les accélérations sont encore centrales, égales et opposées⁽¹⁾. Effectuons maintenant le calcul de la force classique f' sur la particule F.

Première méthode (application des règles classiques). — Si la particule F était fixe, la force sur cette particule serait donnée, à condition que l'on admette la loi classique, et comme il est facile de l'établir à partir de (V-24), par :

$$\begin{aligned} \text{force radiale} &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \right] \\ \text{force normale} &= 0. \end{aligned}$$

Si maintenant cette particule est mobile, cette même force continue à exister, du point de vue classique, mais il faut lui ajouter l'effet du champ

¹⁾ Les relations (IX-15) sont indépendantes des coefficients a , b , c , d , e . Elles sont donc générales. Les coefficients n'interviennent que lorsque les particules sont en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre.

magnétique. Ce dernier a pour valeur en F :

$$\overline{\mathcal{H}} = -\frac{\bar{u}}{r^2} \wedge \bar{v}.$$

La force de LAPLACE est $\bar{v} \wedge \overline{\mathcal{H}}$, de coordonnées $\left(0, -\frac{v^2 \sin \theta}{r^2}\right)$ suivant OX et OY), d'où :

$$(IX-16) \quad \begin{cases} f'_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f'_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [v^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{cases}$$

Deuxième méthode (changement d'axes). — Par rapport aux axes $X_0 Y_0$ les particules sont fixes et l'on a :

$$\begin{cases} f_{x_0} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \cos \theta_0 \\ f_{y_0} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \sin \theta_0. \end{cases}$$

Pour passer aux axes mobiles, il faut effectuer les transformations :

$$\begin{cases} f'_x = f_{x_0} \\ f'_y = \sqrt{1-v^2} f_{y_0} \\ r \cos \theta = r_0 \sqrt{1-v^2} \cos \theta_0 \\ r \sin \theta = r_0 \sin \theta_0. \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} f'_x = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \cos \theta \left[1 + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f'_y = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \sin \theta \left[1 - \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta + 2v^2 \cos^2 \theta \right], \end{cases}$$

d'où, en projetant sur la ligne les particules et sur sa normale :

$$(IX-17) \quad \begin{cases} f'_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta \right] \\ f'_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [v^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{cases}$$

On vérifie bien l'identité de (IX-16) et de (IX-17).

On obtiendrait des expressions analogues pour la force sur la particule G. On voit donc que, contrairement aux forces effectives et aux accélérations, les forces classiques qui s'exercent sur F et G mobiles ne sont pas centrales : elles forment un couple. La plupart des auteurs qui soulignent le fait, concluent

à tort à une « tendance » qu'auraient les particules à faire pivoter la droite qui les joint ⁽¹⁾, le sens de rotation dépendant du signe du produit. Ceci est inexact, puisque finalement les accélérations restent centrales : il n'y a donc pas de rotation possible.

D'ailleurs, toute autre définition de la force donnerait d'autres valeurs du couple (valeur nulle lorsqu'on utilise la force effective) : il y a bien « couple » au sens mathématique du mot, mais non au sens physique. Physiquement, la seule force « qui tire » dans le plan XY est la force effective, qui ne crée pas de couple puisqu'elle est toujours centrale.

§ 5. Examen des différentes lois particulières possibles

A la fin du chapitre précédent, nous avons admis comme certaines les relations (VIII-27) qui exprimaient que :

- la condition C/P 1 était vérifiée, soit $a = 0$ et $d = 0$;
- la condition C/E était vérifiée, soit $c = -\frac{3}{2}$ et $e = 2b$;
- la condition CV/E était vérifiée, soit $M = 1$;

mais nous avons avancé que restaient à vérifier les relations suivantes :

- une des conditions C/P 2 soit $b + N = 0$;
- une des conditions ACC soit $N = +\frac{1}{2}$;

c'est-à-dire que finalement b et N restaient à déterminer expérimentalement.

Or les conditions de champ (IX-13) relatives aux coefficients physiques exigent que l'on ait (outre $a = 0$ et $d = 0$ vérifiées par C/P 1) :

$$e = c - b;$$

d'où, en tenant compte de C/E :

$$b = -\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que, du fait que la condition C/E est satisfaite, seule la loi classique est compatible avec la notion de champ.

(1) BECKER (*Théorie des électrons*, A, § 9) dit : « Il est infiniment plus compliqué de comprendre pourquoi le couple que nous avons trouvé ne s'établit pas en réalité lors du mouvement de plusieurs charges liées. Une contraction seule ne pourrait évidemment pas suffire ici. La compensation du couple ne peut se faire que s'il existe des tensions mécaniques engendrant un couple qui compense exactement le couple électromagnétique. On sait, d'après les expériences très soignées de TROUTON et NOBLE qu'un tel couple n'apparaît effectivement pas ».

Nous voyons en fait que l'existence de telles tensions mécaniques n'est pas nécessaire, non plus d'ailleurs que celle d'un « courant d'énergie et d'impulsion » que l'on est obligé de faire intervenir à leur place. Ce « courant » n'a d'existence que mathématique puisqu'un simple changement de convention dans la définition de la force suffit à le faire disparaître.

En conséquence :

— si les valeurs expérimentales de N et de $b + N$ conduisent à $b = -\frac{1}{2}$, (ce qui se produit classiquement pour $N = +\frac{1}{2}$ et $b + N = 0$, mais peut aussi se produire pour $N \neq \frac{1}{2}$ et $b + N \neq 0$) alors que cela confirme la loi classique, du moins en ce qui concerne les termes en v et en v^2 , et en outre cela justifie l'utilisation de la notion de champ.

— si l'expérience conduit à une valeur de b différente de $-1/2$, alors la notion de champ ne peut être admise. On pourrait en effet formuler d'autres lois que la loi classique qui seraient compatibles avec la notion de champ, mais parmi ces lois seule la loi classique vérifie aussi la condition C/E.

En définitive, la détermination expérimentale de b est essentielle pour justifier la validité de la notion de champ, mais il faut noter qu'elle doit résulter de deux séries d'expériences, l'une portant sur la vérification de la condition C/P 2, l'autre portant sur la vérification de la condition ACC (dans une direction normale à l'accélération).

CHAPITRE X

INTERACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE CAS GÉNÉRAL
 (LOI PARTICULAIRE QUELCONQUE)
 (DÉFINITION QUELCONQUE DE LA FORCE)

§ 1. Introduction

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter l'interaction électromagnétique sous une forme générale, c'est-à-dire :

- avec une loi particulaire quelconque (limitée toutefois aux termes en $\frac{1}{c^2}$ faute de données expérimentales plus précises) ;
- avec une définition quelconque de la force.

Cependant, pour simplifier l'exposé, nous limiterons le choix de cette définition en adoptant les relations suivantes, que l'on peut choisir arbitrairement comme on l'a vu au chapitre précédent :

$$(X-I) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_v \div m_v \gamma_v \\ (m_v)_T = m_0 (1 + \lambda v^2) \\ (m_v)_N = m_0 (1 + \mu v^2). \end{array} \right.$$

Nous allons examiner successivement les cas de l'influence d'un système de particules sur une particule, d'un courant sur une particule et d'un courant sur un courant.

Les conclusions seront enfin appliquées à l'étude de l'induction unipolaire.

§ 2. Influence d'un système de particules sur une particule

Soit un système S quelconque de particules $q_1, q_1, q_1', \dots$ animées chacune des vitesses $\vec{v}_1, \vec{v}_1', \dots$ et des accélérations $\gamma_1, \gamma_1', \dots$

En un point quelconque O, un observateur pourra constater l'influence de ce système sur une particule mobile q_2 en mesurant l'accélération de cette

particule, donc la force effective; si la particule est fixe, il pourra mesurer la force (classique = effective) qui s'exerce sur elle.

D'une façon générale, si v_2 est la vitesse de la particule q_2 , on pourra écrire la force effective $\bar{f}$ sous la forme :

$$(X-2) \quad \bar{f} = \sum - \frac{q_1 q_2}{r^2} [\bar{u} + \bar{\Phi}(v_1) + \bar{\Psi}(v_2) + \bar{\Pi}(v_1 v_2)] + \sum - \frac{q_1 q_2}{r} \bar{\Gamma}(\gamma_1)$$

dans laquelle Σ signifie qu'il s'agit de la résultante vectorielle des forces exercées par chacune des particules q_1 influençantes, $\bar{u}$ est le vecteur unitaire de chacune des distances de q_2 aux particules q_1 , les fonctions $\bar{\Phi}(v_1)$ et $\bar{\Psi}(v_2)$ sont du second degré en v_1 et en v_2 , et la fonction $\bar{\Pi}(v_1 v_2)$ est une fonction linéaire des produits $v_1 v_2$.

Dorénavant, le symbole Σ sera sous-entendu, ainsi que les facteurs $-\frac{q_1 q_2}{r^2}$ et $-\frac{q_1 q_2}{r}$.

D'autre part, nous nous bornerons au cas où les fonctions $\bar{\Phi}(v_1)$ et $\bar{\Psi}(v_2)$ n'ont pas de termes du premier degré en v , ce qui revient à choisir $a = 0$ et $d = 0$. Enfin il sera possible de mettre v_1^2 , v_2^2 et γ_1 en facteur, ce qui conduira pour $\bar{f}$ à la notation symbolique :

$$(X-3) \quad \bar{f} = \bar{u} + v_1^2 \bar{\Phi} + v_2^2 \bar{\Psi} + v_1 v_2 \bar{\Pi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}$$

où les vecteurs $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$, $\bar{\Pi}$ et $\bar{\Gamma}$ sont des fonctions des coefficients de la loi particulière ainsi que des lignes trigonométriques des angles θ_1 , θ_2 et φ_1 . Par exemple, $\bar{\Gamma}$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} \text{suivant } r : & \quad M \cos \varphi_1 \\ \text{suivant } n : & \quad N \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Il est à noter que les expressions des forces $\bar{\Psi}$ et $\bar{\Pi}$ peuvent se déduire analytiquement de celle des forces $\bar{\Phi}$, puisqu'elles sont nulles lorsque la particule influencée q_2 est fixe, c'est-à-dire par rapport à des axes liés à cette particule. Ces forces apparaissent donc par simple passage à un système d'axes mobiles par rapport à la particule (compte tenu naturellement de la variation relativiste des distances r_1 , r'_1 , r''_1 , ... et des vitesses v_1 , v'_1 , v''_1 , ...). C'est ainsi que l'on peut passer des relations (V-5) et (V-6) aux relations (V-8) et (V-9).

Si maintenant on utilise une définition de la force autre que celle de la force effective, c'est-à-dire si l'on applique les relations (X-1), on obtient :

- pour $\bar{u} + v_1^2 \bar{\Phi} + v_1 v_2 \bar{\Pi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}$ une expression inchangée ;
- pour $v_2^2 \bar{\Psi}$, les nouvelles coordonnées ;

$$\begin{aligned} \text{suivant } r : & \quad v_2^2 \psi_r + \mu v_2^2 \sin^2 \theta_2 + \lambda v_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ \text{suivant } n : & \quad v_2^2 \psi_n + (\lambda - \mu) v_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

ainsi qu'on peut le voir sur la relation (IX-10).

Autrement dit, le vecteur $\bar{\psi}$ devient un nouveau vecteur que nous noterons $\bar{\psi}_{\lambda\mu}$, et la loi particulière générale s'écrira :

$$(X-4) \quad \bar{f} = \bar{u} + v_1^2 \bar{\Phi} + v_2^2 \bar{\psi}_{\lambda\mu} + v_1 v_2 \bar{\Pi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}$$

où le terme $\gamma_1 \bar{\Gamma}$ peut s'écrire, si l'on considère séparément l'accélération normale et l'accélération tangentielle :

$$\gamma_1 \bar{\Gamma}_T + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N.$$

§ 3. Influence d'un courant sur un élément

Cherchons la loi élémentaire qui correspond à la loi particulière générale (X-4).

Soulignons d'abord que, d'après cette expression (X-4), si l'on considère l'interaction d'une particule fixe et d'une particule mobile de vitesse w , la force qui s'exerce sur la particule fixe est $\bar{u} + w^2 \bar{\Phi}$ et celle sur la particule mobile est $\bar{u} + w^2 \bar{\psi}_{\lambda\mu}$. Il n'y a pas égalité de l'action et de la réaction. Il est facile en outre de vérifier qu'il n'est pas possible de choisir λ et μ de telle sorte que cette égalité soit réalisée. Cela est visible en explicitant les fonctions $\bar{\Phi}$ et $\bar{\psi}$, c'est-à-dire en écrivant la force f sur la particule fixe sous la forme (IX-6) :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + A w \cos \theta + B w^2 \sin^2 \theta + C w^2 \cos^2 \theta] \\ f_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [D w \sin \theta + E w^2 \sin \theta \cos \theta] \end{cases}$$

et la force $\bar{g}$ sur la particule mobile sous la forme (IX-10) :

$$\begin{cases} g_r = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [1 + A w \cos \theta + (B - 1 + \mu) w^2 \sin^2 \theta + \left(C - \frac{1}{2} + \lambda\right) w^2 \cos^2 \theta] \\ g_n = -\frac{q_1 q_2}{r^2} [-D w \sin \theta - (E - 1 + \lambda - \mu) w^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{cases}$$

Il en résulte que si un électron mobile d'un courant est soumis à une force non nulle g , il transmet aux particules positives fixes une force $\bar{f}$ différente de g , c'est-à-dire qu'il faut effectuer sur $\bar{g}$ une correction définie par les relations :

$$\begin{cases} g_r = f_r \left[1 + (1 - \mu) w^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) w^2 \sin^2 \theta \right] \\ g_n = -f_n - f_r (1 - \lambda + \mu) w^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

qui se réduisent aux relations (V-7) dans le cas où λ et μ sont choisis nuls.

En conséquence, en analysant l'influence mutuelle de deux éléments de courant, on obtient :

force de $(1)_+$ sur $(2)_+$	1
force de $(1)_-$ sur $(2)_+$	$1 + v_1^2 \bar{\Phi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}$
force de $(1)_+$ sur $(2)_-$	$1 + v_2^2 \bar{\Psi}_{\lambda\mu}$
force de $(1)_-$ sur $(2)_-$	$[1 + v_1^2 \bar{\Phi} + v_2^2 \bar{\Psi}_{\lambda\mu} + v_1 v_2 \Pi + \gamma_1 \bar{\Gamma}]$

d'où :

force de l'élément (1) sur $(2)_+$	$v_1^2 \bar{\Phi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}$
force de l'élément (1) sur $(2)_-$	$-v_1^2 \bar{\Phi} - \gamma_1 \bar{\Gamma} - v_1 v_2 \bar{\Pi}$

A priori, on ne peut ajouter purement et simplement ces deux forces : il faut d'abord effectuer sur la dernière force la correction qui vient d'être indiquée afin d'obtenir la force exercée par $(2)_-$ sur $(2)_+$. Cependant, dans le cas présent, cette correction est inutile, la force étant du second ordre. On a donc finalement :

$$\text{force de l'élément (1) sur l'élément (2)..... } v_1 v_2 \bar{\Pi}.$$

On constate donc que les termes de la loi élémentaire ne sont autres que les termes en $v_1 v_2$ de la loi particulière. Or, comme il a été dit au paragraphe 7 du chapitre V, cela permet de conclure que la condition C/E, qui exprime l'influence d'un circuit fixe sur un élément fixe, exprime aussi les lois expérimentales de l'induction concernant les circuits mobiles à intensité constante.

Cette conclusion est donc tout à fait générale et s'applique quelle que soit la loi particulière et quelle que soit la définition choisie pour la force.

NOTA. — En général, et malgré l'application de la condition C/E, la force Π entre éléments n'est pas perpendiculaire à la vitesse v_2 , comme on peut le voir sur l'expression (V-27) de cette force.

§ 4. Influence d'un courant sur une particule

Dans le cas particulier où le système S n'est composé que de courants fermés, fixes et d'intensité constante;

— la somme des forces u est nulle du fait que les courants sont électriquement neutres;

— la somme des forces $v_2^2 \bar{\Psi}$ étant indépendante des v_1 , a la même valeur que si les v_1 étaient tous nuls : elle est donc nulle;

— la somme des forces $v_1 v_2 \Pi$ n'est en général pas nulle et est perpendiculaire à la vitesse $\bar{v}_2$, du fait de l'application de la condition C/E;

— la somme des forces $\gamma_1 \bar{\Gamma}$ est nulle du fait que les courants sont d'intensité constante;

— la somme des forces $v_1^2 \bar{\Phi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N$ ne dépend en fait que de v_1 pour des circuits donnés, car l'accélération normale est égale à v_1^2 divisé par le rayon de courbure au point considéré du circuit. Cette somme n'est en général pas nulle : elle ne l'est que si la condition C/P 2 est vérifiée.

En définitive, sous l'influence de courants constants, il ne se manifeste sur la particule q_2 que la force :

$$v_1^2 \Phi + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N + v_1 v_2 \bar{\Pi}.$$

1° Lorsque la condition C/P 2 est réalisée, cette force se réduit à :

$$v_1 v_2 \bar{\Pi}$$

et par conséquent, dans ce cas, un électron qui se déplace est assimilable à un courant ;

2° Lorsque la condition C/P 2 n'est pas réalisée :

— si v_2 est très grand par rapport à v_1 (c'est le cas par exemple d'un faisceau électronique passant au voisinage d'un courant), la force $v_1 v_2 \bar{\Pi}$ est prépondérante et l'on peut dire qu'un électron rapide est encore assimilable à un courant.

— si v_2 n'est pas très grand par rapport à v_1 (c'est le cas d'un électron d'un courant placé au voisinage d'un autre courant) chaque électron q_2 est soumis non seulement à la force $v_1 v_2 \bar{\Pi}$ mais aussi aux forces $v_1^2 \bar{\Phi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N$; il ne se comporte donc pas comme un courant, du point de vue de la force qui lui est appliquée. Par contre, puisque chaque particule positive fixe est soumise aux forces $v_1^2 \bar{\Phi} + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N$, la résultante sur le conducteur reste l'effet LAPLACE $v_1 v_2 \bar{\Pi}$.

On conçoit alors qu'il puisse exister (pour certaines dispositions particulières des particules q_1) une valeur de v_2 telle que :

$$v_1^2 \bar{\Phi} + \gamma_1 \bar{\Gamma} + v_1 v_2 \bar{\Pi} = 0.$$

Suivant que l'électron q_2 a une vitesse v_2 supérieure ou inférieure à cette valeur, il a alors tendance à se déplacer dans le sens indiqué par la loi de LAPLACE ou dans le sens contraire.

§ 5. Remarques à propos de l'expérience de Kaufman-Bucherer

Cette expérience consiste à faire traverser par les électrons d'un faisceau un champ électrique et un champ magnétique (en employant la terminologie classique), champs supposés uniformes, parallèles entre eux et perpendiculaires à la vitesse initiale v des électrons, et à mesurer la déviation que le faisceau a subi.

1° Avec l'interprétation classique, la déviation totale constatée est telle que tout se passe comme si la masse était multipliée par $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ (la masse transversale seule intervient). Or la déviation par le champ électrique est déjà, à elle seule, telle que la masse doive subir cette correction : ceci est en effet démontré au paragraphe 3 du chapitre V. Donc la déviation du champ magnétique doit aussi comporter cette même correction.

En revenant à l'interprétation conservant la masse invariante, on peut dire que la déviation d'un faisceau d'électrons qui passe à proximité d'un courant formé, révèle une diminution de l'accélération, donc de la force effective, qui est multipliée par $\sqrt{1-v_2^2}$.

En conséquence, dans l'expérience K-B, la force effective sur chaque électron est, en bornant la correction au second ordre, c'est-à-dire en se bornant au quatrième ordre :

$$v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{2} v_2^2\right) \bar{\Pi},$$

2° Si maintenant on remplace le faisceau électronique par un élément de courant, il résulte de l'application de la première des relations (V-7), que la force exercée sur les électrons se transmet aux particules fixes (ce qui produit la force constatée sur un élément de courant) en s'accroissant du facteur $1 + v_2^2$.

En conséquence, la force qu'exerce un circuit sur un élément est $v_1 v_2 \left(1 + \frac{1}{2} v_2^2\right) \bar{\Pi}$ (et non $v_1 v_2 \bar{\Pi}$, ainsi que cela avait été admis en tant que donnée expérimentale pour définir la condition C/E). Ce fait est d'ailleurs démontré au paragraphe 2 du Chapitre VI dans le cas où le courant influençant est rectiligne. La somme des relations (VI-6) et (VI-7) donne en effet pour la force sur l'électron, avec des axes liés à celui-ci, la valeur $\rho \frac{v_1 v_2}{\sqrt{1-v_1^2}}$.

Si l'on passe à des axes fixes (liés au courant), cette force devient une force effective de valeur $\rho v_1 v_2 \sqrt{1-v_2^2}$ (par application de la formule de transformation de l'accélération transversale $\gamma' = \gamma(1-v^2)$). Enfin, cette force qui équivaut à $\rho v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{2} v_2^2\right)$ se retransmet sur les particules fixes, dans le cas où l'électron fait partie d'un courant, en devenant $\rho v_1 v_2 \left(1 + \frac{1}{2} v_2^2\right)$.

3° Ceci étant, on considère en général que l'expérience de K-B, d'après laquelle l'accélération constatée est $v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{2} v_2^2\right) \bar{\Pi}$, constitue une démonstration de la variation relativiste de la masse. Cela ne peut pas être puisque cette variation est arbitraire. Il serait plus correct de considérer que l'adoption de la masse relativiste classique est commode, bien que non obligatoire, en ce sens que la force, qui serait alors la force classique, serait alors toujours $v_1 v_2 \bar{\Pi}$ cette valeur n'étant d'ailleurs pas égale à la force exercée sur un élément de courant qui est $v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{2} v_2^2\right) \bar{\Pi}$.

4° En définitive, l'expérience de K-B ne permet que de conclure :

- à l'adoption du cadre relativiste spatio-temporel (puisque la déviation due à l'influence électrostatique serait différente dans le cadre galiléen);
- à la confirmation de la condition C/E, si l'on se limite au second ordre;
- à la modification de la condition C/E par un facteur $1 + \frac{1}{2}v^2$, si l'on s'étend au quatrième ordre (dans le cas tout au moins où l'influence électrostatique est produite par des plans chargés considérés comme infinis).

§ 6. Vérification expérimentale de la condition de champ

Revenons à l'expression de la loi particulière générale exprimée en force effective :

$$\bar{f} = \bar{u} + v_1^2 \Phi + v_2^2 \bar{\Psi} + v_1 v_2 \Pi + \gamma_1 \bar{\Gamma}_T + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N.$$

En omettant la condition ACC (relation VIII-15) qui fait intervenir les termes du premier ordre en v , on peut dire que :

- le terme $v_1^2 \Phi + \gamma_1 \bar{\Gamma}_N$ est lié à la condition C/P 2;
- le terme en $\gamma_1 \bar{\Gamma}_T$ est lié à la condition CV/E;
- le terme en $v_1 v_2 \Pi$ est lié à la condition C/E.

Quant au terme en $v_2^2 \bar{\Psi}$, il est lié à la condition de champ, car cette condition est remplie lorsque ce terme, sous la forme générale $v_2^2 \bar{\Psi}_{\lambda\mu}$ peut s'annuler par un choix convenable de λ et μ .

Or, expérimentalement, la force $\bar{\Psi}$ disparaît :

— dans l'interaction courant sur courant, qui ne laisse subsister que la force Π .

— dans l'interaction courant sur particule. En effet, les courants, ne peuvent provoquer que des forces s'annulant avec v_1 , et par suite $v_2^2 \bar{\Psi}$ étant indépendant de v_1 est nul.

— dans l'interaction particule sur courant. En effet, bien que la force exercée par la particule (2) sur les particules mobiles du courant comprenne des termes en $v_2^2 \bar{\Psi}$, la retransmission de cette force sur les particules fixes où courant se traduit par une correction qui transforme ces termes en $v_2^2 \bar{\Phi}$, comme il a été dit plus haut. En définitive la mesure de l'influence d'une particule sur un courant ne permet pas de déterminer les forces $\bar{\Psi}$.

Il reste donc que ces forces $\bar{\Psi}$ si elles existent, ne peuvent être décelées que dans l'interaction particule mobile sur particule, par la mesure de l'accélération d'une particule mobile placée sous l'influence soit d'une particule soit d'un système de particules non électriquement neutres. Encore ce système ne doit-il pas être constitué par un plan pratiquement indéfini uniformément chargé, car on réaliserait ainsi un champ même si la loi particulière ne remplissait pas la condition de champ (voir note du paragraphe 3 du Chapitre IX).

§ 7. Application à l'induction unipolaire

Soit un courant constant circulaire de centre O et de rayon R, et une charge q_2 occupant une position quelconque par rapport au courant, dont les électrons ont une vitesse moyenne v_1 (fig. 24).

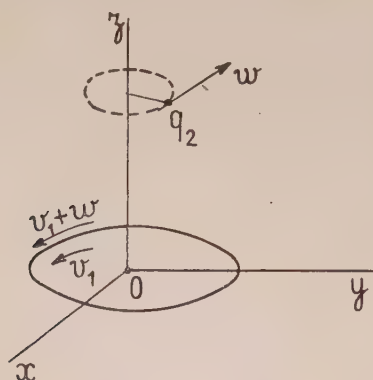


Fig. 24

1^o CONDITION C/P 2 RÉALISÉE.

- a. La force qui s'exerce sur la particule q_2 fixe est la somme :
des forces exercées par les particules positives fixes du courant

$$- \frac{+ |q_1| q_2}{r^2} u$$

- des forces exercées par les particules négatives mobiles du courant :

$$- \frac{- |q_1| q_2}{r^2} [u + v_1^2 \Phi] - \frac{- |q_1| q_2}{r} \gamma_1 \bar{\Gamma}_N.$$

Cette force totale est nulle puisque d'une part l'influence coulombienne résultante est nulle et que d'autre part, la condition C/P 2 étant réalisée, l'influence des termes en v_1^2 et celle des termes en $\gamma_1 = \frac{v_1^2}{R}$ se compensent mutuellement.

b. Faisons maintenant tourner le circuit autour de son axe à la vitesse périphérique w , mais sans faire tourner la source de courant, c'est-à-dire en alimentant le circuit par balais et collecteurs. De la sorte, la densité des particules positives et celle des particules négatives restent égales ⁽¹⁾.

(1) Si la source tournait avec le courant, les charges totales positive et négative seraient encore égales, mais la densité des particules (mesurées par rapport à q_2) ne serait plus uniforme, et le circuit tournant aurait alors une influence sur q_2 .

Les particules positives tourneront à la vitesse w et auront une accélération normale $\frac{w^2}{R}$, dont les influences respectives se compenseront.

Les particules négatives tourneront à la vitesse $v_1 + w$ et auront une accélération $\frac{(v_1 + w)^2}{R}$, dont les influences respectives se compenseront également.

En conséquence, le circuit tournant n'aura pas d'influence sur q_2 .

c. Faisons maintenant tourner q_2 autour de l'axe à la vitesse linéaire w , le circuit restant fixe.

Il apparaît des forces $w^2\bar{\psi}$ et $-w^2\bar{\psi}$ dues aux particules positives et négatives du courant, et dont la résultante est évidemment nulle. Il apparaît également la force $v_1 w \bar{\Pi}$ qui, comme nous l'avons vu au paragraphe 3 ci-dessus, est la même que celle qui résulterait de l'application de la loi de LAPLACE sur un élément de courant analogue à $q_2 w$.

d. Faisons maintenant tourner à la fois la particule q_2 et le courant autour de l'axe, à la même vitesse w .

La force exercée par les particules positives du courant est :

$$- \frac{+ |q_1| |q_2|}{r^2} [\bar{u} + w^2 \bar{\Phi} + w^2 \bar{\psi} + w_1 w_1 \bar{\Pi}] - \frac{+ |q_1| |q_2| w^2}{r} \bar{\Gamma}_N$$

où le terme en $\bar{\Gamma}_N$ relatif à l'accélération normale compense le terme en $\bar{\Phi}$.

La force exercée par les particules négatives du courant est :

$$- \frac{- |q_1| |q_2|}{r^2} [\bar{u} + (v_1 + w)^2 \bar{\Phi} + w^2 \bar{\psi} + w (v_1 + w) \bar{\Pi}] - \frac{- |q_1| |q_2| (v_1 + w)^2}{r} \bar{\Gamma}_N$$

où le terme en $\bar{\Gamma}_N$ compense encore le terme en $\bar{\Phi}$.

La résultante est donc de la forme (en se limitant au second ordre) :

$$- \frac{+ |q_1| |q_2|}{r^2} v_1 w \bar{\Pi}.$$

La force de LAPLACE $\bar{\Pi}$ apparaît et est la même que si le courant était fixe, la particule q_2 ayant encore la même vitesse w .

2^o CONDITION C/P 2 NON RÉALISÉE. — Dans ce qui va suivre, la force $\bar{\Gamma}$ sera implicitement incluse dans la force $\bar{\Phi}$, pour simplifier l'écriture.

Dans ces conditions, l'expression de la force sur q_2 est donnée par le calcul schématique suivant :

Repos :

Influence complémentaire des —		$v_1^2 \bar{\Phi}$
Influence complémentaire des +		0
Total		$v_1^2 \bar{\Phi}$

Circuit tournant seul :

Influence complémentaire des —.....	$(v_1 + w)^2 \bar{\Phi}$
Influence complémentaire des +.....	$- w^2 \Phi$
Total.....	$v_1^2 \bar{\Phi} + 2 v_1 w \bar{\Phi}$

Charge tournant seule :

Influence complémentaire des —.....	$v_1^2 \Phi + w^2 \bar{\Psi} + v_1 w \bar{\Pi}$
Influence complémentaire des +.....	$- w^2 \bar{\Psi}$
Total.....	$v_1^2 \bar{\Phi} + v_1 w \bar{\Pi}$

Charge et circuit tournant ensemble :

Influence complémentaire des — .	$(v_1 + w)^2 \Phi + w^2 \bar{\Phi} + w (v_1 + w) \bar{\Pi}$
Influence complémentaire des + .	$- (w^2 \bar{\Phi} + w^2 \bar{\Psi} + w w \bar{\Pi})$
Total.....	$v_1^2 \bar{\Phi} + 2 v_1 w \Phi + v_1 w \bar{\Pi}$

On voit apparaître, en plus de la force de LAPLACE $\bar{\Pi}$, une force qui est la même que si la particule était fixe. Cette force a pour expression :

$$v_1^2 \bar{\Phi} + 2 v_1 w \bar{\Phi}.$$

Elle est fonction de w , est égale à $v_1^2 \bar{\Phi}$ lorsque le circuit est fixe, et est nulle si $w = -\frac{v_1}{2}$ (les particules positives et négatives du courant ont alors des vitesses égales et opposées).

3^o APPLICATION. — Ce qui précède est valable pour une loi particulière quelconque. Nous allons l'appliquer au cas des lois vérifiant C/E et CV/E.

Reportons-nous au paragraphe 7, 4^o du chapitre VII qui donne le calcul de la force exercée par un courant circulaire sur une particule fixe placée sur son axe. On a, pour une distance suffisante et compte tenu de $M = 1$:

$$\delta^2 f = -\frac{q_1 q_2}{r^2} (b + N) v_1^2.$$

Lorsque le courant tourne à la vitesse w , on a :

$$\begin{aligned} \delta^2 f_w &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} (b + N) (v_1 + w)^2 + \frac{q_1 q_2}{r^2} (b + N) w^2 \\ &= -\frac{q_1 q_2}{r^2} (b + N) v_1 (v_1 + 2w). \end{aligned}$$

Cette force est dirigée parallèlement à l'axe du circuit (répulsive pour un électron), tandis que la force $\bar{\Pi}$, qui n'apparaît que lorsque la particule est mobile, est sensiblement perpendiculaire à cet axe.

Cette constatation suggère le processus expérimental suivant : pour vérifier si la condition C/P 2 est réalisée, on peut, au lieu de mesurer la force d^2f provoquée par un circuit au repos, étudier l'influence d'un circuit circulaire en rotation alimenté par une source fixe. Si la force d^2f est nulle au repos, elle reste nulle pour le circuit en mouvement. Si elle n'est pas nulle au repos, on voit apparaître lorsque le circuit est en mouvement une force d^2f_w qui d'après la relation ci-dessus est nettement supérieure à sa valeur au repos, dans la mesure où il est facile de réaliser des vitesses de rotation w élevées par rapport à la vitesse moyenne v_1 du courant.

Quoiqu'il en soit, l'interprétation particulière des courants explique clairement les phénomènes de l'induction unipolaire, tout au moins quand la condition C/P 2 est vérifiée, et, quand elle ne l'est pas, lorsque la force de LAPLACE $\bar{\Pi}$ est nettement supérieure à la force Φ .

§ 8. Généralisation de l'induction unipolaire

Ce qui précède, et qui est relatif à un circuit circulaire tournant sur lui-même, rappelle les résultats obtenus au nota 3 du paragraphe 2 du chapitre VI relatifs à l'influence d'un circuit rectiligne indéfini glissant sur lui-même, dans le cas (voir fig. 13 a) où la source de courant n'est pas entraînée dans le mouvement.

Ces résultats ont un caractère général et il est facile de voir qu'ils restent valables pour un circuit de forme quelconque glissant sur lui-même : un tel mouvement ne peut créer une influence C/P 2, lorsque celle-ci est nulle au repos, et ne peut l'annuler lorsqu'elle existe au repos, et d'autre part seul le mouvement de la particule fait apparaître la force de LAPLACE.

CONCLUSIONS

I. La loi particulière a été tout d'abord mise sous la forme d'un développement en série comprenant des termes en $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^2} \frac{v}{c}$, $\frac{1}{r^2} \frac{v^2}{c^2}$ et $\frac{1}{r} \frac{\gamma}{c^2}$, c'est-à-dire limitée aux termes en $\frac{1}{c^2}$ (comme l'est la précision des données expérimentales retenues).

Par des considérations axiomatiques de symétrie, on aboutit à la forme suivante, qui exprime les composantes radiale et normale de la force exercée sur une particule fixe $q_1 = 1$ par une particule mobile $q_2 = 1$ située à la distance actuelle r , ayant une vitesse actuelle v qui fait un angle θ avec le rayon vecteur, et ayant une accélération γ qui fait un angle φ avec le rayon vecteur :

$$\begin{cases} g_r = -\frac{1}{r^2} \left[1 + av \cos \theta + (b+1) v^2 \sin^2 \theta + \left(c + \frac{1}{2} \right) v^2 \cos^2 \theta \right] - \frac{1}{r} M \gamma \cos \varphi \\ g_n = -\frac{1}{r^2} [dv \sin \theta + (e+1) v^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{1}{r} N \gamma \sin \varphi. \end{cases}$$

On peut en déduire, soit dans le cadre spatio-temporel galiléen, soit dans le cadre relativiste, la force exercée réciproquement par la particule fixe sur la particule mobile, et plus généralement la force exercée par une particule mobile sur une autre particule mobile, ce qui permet de calculer les influences mutuelles entre courants et entre particules et courants, et par suite, en confrontant avec les résultats expérimentaux, de déterminer la valeur des coefficients a, b, c, d, e, M et N .

II. PREMIER GROUPE DE CONCLUSIONS (RELATIVES AUX COEFFICIENTS DE LA LOI PARTICULIÈRE).

1. On doit faire appel aux résultats expérimentaux suivants :

1° Influence d'un circuit fixe et d'intensité constante sur :

- un élément de courant fixe;
- un conducteur mobile;
- une particule chargée en mouvement.

Ces trois phénomènes sont de même nature (plus exactement la première loi de l'induction implique la loi de LAPLACE étendue à un circuit) et se traduisent dans le cadre relativiste par les relations :

$$e = 2b \quad c = -\frac{3}{2}$$

appelées « conditions C/E » parce que ce sont les conditions que doit remplir la loi particulière pour qu'un circuit C ait la même influence sur un élément E que si l'on appliquait la loi de LAPLACE.

2° Influence d'un courant constant fixe sur une particule chargée fixe :

— cette influence est nulle en ce qui concerne les termes du premier degré (en $\frac{v}{c}$) si :

$$a + d = 0 \quad \text{appelée « condition C/P 1 » ;}$$

— cette influence est nulle en ce qui concerne les termes du deuxième degré

(en $\frac{v^2}{c^2}$ et $\frac{\gamma}{c^2}$) si :

$$b + N = 0 \quad M = 1 \quad \text{appelées « condition C/P 2 » ;}$$

3° Influence d'un courant fixe et d'intensité variable sur un circuit fixe (deuxième loi de l'induction).

La seconde loi de l'induction est vérifiée si :

$$M = 1 \quad \text{appelée « condition CV/E » ;}$$

4° Influence d'une charge oscillante.

L'influence d'une charge oscillante sur une charge fixe placée soit dans la direction de l'oscillation, soit dans une direction perpendiculaire, est la même que celle donnée par la loi classique si :

$$M = a + 1 \quad N = d + \frac{1}{2} \quad \text{appelées « conditions ACC ».}$$

2. L'ensemble des relations expérimentales ci-dessus conduit à la détermination de tous les coefficients de la loi particulière. On obtient :

$$a = 0 \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = -\frac{3}{2} \quad d = 0 \quad e = -1 \quad M = 1 \quad N = \frac{1}{2}$$

ce qui caractérise la loi classique (tout au moins dans ses termes principaux), qui est ainsi démontrée à partir de l'expérience (dans la mesure où l'on admet la validité des résultats expérimentaux utilisés).

III. SECOND GROUPE DE CONCLUSIONS (RELATIVES AUX NOTIONS DE FORCE ET DE MASSE). — L'analyse montre que les notions de force et de masse présentent un certain degré d'arbitraire, en ce sens qu'à toute définition de la force correspond une définition de la masse, et inversement.

La description des phénomènes, en particulier l'accélération d'une particule influencée, est évidemment indépendante de la définition adoptée pour la force ou la masse.

IV. TROISIÈME GROUPE DE CONCLUSIONS (RELATIVES A LA NOTION DE CHAMP). — L'analyse montre que la notion de champ n'a pas un caractère axiomatique impératif et qu'elle est en outre liée à la définition adoptée pour

la force et la masse. La notion de champ doit donc soit être posée comme un postulat (et il n'y a pas de justification rationnelle à le faire) soit résulter de l'expérience (et elle peut ne pas en résulter). Elle impose en effet que les coefficients de la loi particulière satisfassent aux relations :

$$a = 0 \qquad d = 0 \qquad e = c - b.$$

Si l'on postule l'existence d'un champ, on aboutit à la loi particulière classique en partant de la seule loi de COULOMB dans le cadre de la relativité, et à condition toutefois d'adopter la définition classique de la force et de la masse relativistes, sinon la notion de champ ne s'appliquerait plus à la loi classique elle-même.

Si l'on ne postule pas l'existence d'un champ et que l'on s'en tienne aux résultats expérimentaux, on retrouve également la loi classique en admettant la totalité des résultats expérimentaux rassemblés au paragraphe II ci-dessus, ce qui, dans cette éventualité, démontre la validité de la notion de champ. Par contre, si l'on admet comme valables qu'une partie de ces résultats, cela ouvre la possibilité de lois particulières incompatibles avec la notion de champ. Ce sera en particulier le cas si l'expérience donnait pour le coefficient b une valeur différente de $-\frac{1}{2}$, car cette dernière valeur, qui correspond à la loi classique, est la seule qui permette de satisfaire à la condition de champ, la condition C/E étant admise.

V. QUATRIÈME GROUPE DE CONCLUSIONS (RELATIVES AUX DONNÉES EXPÉRIMENTALES UTILISÉES). — Il semble que l'on puisse envisager que les résultats expérimentaux ne soient pas suffisamment précis en ce qui concerne :

— la condition C/P 2;

— la partie de la condition ACC relative à la grandeur exacte de l'influence qu'exerce une particule oscillante perpendiculairement à sa direction d'oscillation.

Dans ce cas, les valeurs $b = -\frac{1}{2}$ et $N = +\frac{1}{2}$, que prennent les coefficients b et N avec la loi classique seraient douteuses, et en outre de ce fait la condition de champ pourrait ne pas être satisfaite. En particulier, avec une loi particulière pour laquelle on aurait $b = 0$ (donc incompatible avec la notion de champ) et $N = 0$, l'accélération de la particule influencée mobile serait centrale (alors que la loi classique correspond à une force relativiste centrale, donc à une accélération non centrale). La force sur la particule fixe serait alors dirigée vers la position retardée qu'aurait la particule mobile si la vitesse de propagation de l'influence était égale à celle des ondes de DE BROGLIE.

La vérification de cette condition ACC nécessite la mesure précise de l'intensité du « champ » rayonné transversal.

La vérification de la condition C/P 2 pourrait se faire à l'aide d'un courant circulaire tournant sur lui-même, car il est montré que l'on obtiendrait ainsi des effets beaucoup plus sensibles qu'avec un courant fixe.

Si la première de ces vérifications s'avère inutile, c'est-à-dire si l'on est certain de la valeur $N = +\frac{1}{2}$, il n'en reste pas moins que la seconde vérification est nécessaire pour démontrer la loi classique à partir de l'expérience et aussi pour justifier l'utilisation de la notion de champ.

VI. CINQUIÈME GROUPE DE CONCLUSIONS (RELATIVES AU CADRE SPATIO-TEMPOREL).

1° On a appelé « condition C/C » la relation :

$$2b + c - e = -\frac{3}{2}$$

d'après laquelle, dans le cadre relativiste, l'influence mutuelle de deux circuits fixes d'intensité constante est le même que par application de la loi de LAPLACE. Cette condition est évidemment plus large que la condition C/E qui l'implique.

On montre que la condition C/P 2 pour un courant rectiligne indéfini se réduit à la condition C/C, dans le cadre relativiste. La condition C/C étant vérifiée par ailleurs, ceci justifie la validité de ce cadre. (Dans le cadre galiléen, la condition C/P 2 pour un courant rectiligne est contradictoire avec la condition C/C.)

2° L'influence sur une particule mobile d'un plan uniformément chargé se traduit également par la condition C/C et résulte de la contraction relativiste des temps et des longueurs. (Par contre, dans le cadre galiléen, les résultats expérimentaux seraient en contradiction avec la condition C/C, ce qui confirme la nécessité d'abandonner ce cadre.)

3° L'expérience de KAUFFMANN-BUCHERER équivaut à vérifier la condition C/E dans le cadre relativiste, et par conséquent (puisque la condition C/E est vérifiée par ailleurs) est une preuve de la validité de ce cadre, c'est-à-dire de la contraction des temps et des longueurs (et non une preuve de la variation de la masse, qui est arbitraire).

VII. SIXIÈME GROUPE DE CONCLUSIONS (CONCLUSIONS DIVERSES).

1° La loi de LAPLACE est compatible avec la condition de relativité et incompatible avec l'emploi du cadre spatio-temporel galiléen;

2° L'influence sur un circuit fixe d'un courant fixe non rectiligne parcouru par un courant d'intensité constante fait intervenir les termes en γ du fait de l'accélération normale des charges du courant (celles-ci doivent être considérées comme accélérées du fait de la courbure du courant, bien que l'intensité soit constante).

3° La loi de l'induction relative à l'influence d'un courant fixe mais d'intensité variable est de nature différente (en ce qui concerne les termes de la loi particulière) de celle relative à l'influence d'un courant constant mais mobile. Dans le premier cas l'influence est due à l'accélération tangentielle des particules mobiles formant le courant. Dans le second cas, elle est due à la vitesse de translation du circuit mobile.

4^o L'induction unipolaire d'un circuit tournant sur lui-même s'explique aisément par l'interprétation particulière des courants, quelle que soit la loi particulière, dès le moment où la condition C/E est vérifiée. Elle se généralise en outre à tout circuit de forme quelconque, glissant sur lui-même en conservant cette forme.

RÉFÉRENCES

-
- Réf. 1. M.-A. AMPÈRE. — « Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience », *Mém. Acad. Sci.* (1823).
- Réf. 2. P. MOON et D.E. SPENCER. — « Interpretation of the Ampère experiments » et « The Coulomb force and the Ampère force », *Journal of the Franklin Institute* (mars et avril 1954).
- Réf. 3. H. ARZELIÈS. — *La dynamique relativiste et ses applications*. Gauthier-Villars (1957).
- Réf. 4. R. REULOS. — *Étude sur une nouvelle méthode d'intégration des équations de Maxwell*. Thèse (1937).
- Réf. 5. R. BECKER. — *Théorie des électrons*. F. Alcan (1938).

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	591
CHAPITRE PREMIER. — <i>Loi générale de l'interaction de deux éléments de courant</i> ...	595
1. Exposé.....	595
2. Définitions.....	595
3. Postulats.....	597
4. Calcul de la force entre éléments.....	597
5. Réduction du nombre des coefficients.....	598
6. Expressions de la force exercée par (1) sur (2).....	600
7. Expressions de la force exercée par (2) sur (1).....	602
CHAPITRE II. — <i>Recherche des différentes lois élémentaires possibles</i>	603
1. Introduction.....	603
2. Loi de LAPLACE.....	603
3. Condition C/E.....	604
4. Condition E/C.....	606
5. Condition C/C.....	607
6. Condition des forces parallèles.....	608
7. Condition des forces centrales.....	608
8. Loi d'AMPÈRE.....	609
9. Loi de NEUMANN élémentaire.....	610
10. Positions logiques des différentes conditions.....	611
11. Conclusions.....	612
CHAPITRE III. — <i>Loi générale non relativiste d'interaction entre particules</i>	614
1. Retour sur la notion de force.....	614
2. Forme générale de la loi particulière.....	616
3. Forme générale de la loi élémentaire.....	619
4. Action d'un élément de courant sur une particule.....	621
5. Action d'un élément de courant sur la matière. Loi de l'induction.....	622
6. Condition sur les termes du premier ordre.....	625
7. Condition sur les termes de second ordre.....	626
CHAPITRE IV. — <i>Applications et conséquences de la loi particulière non relativiste</i> ...	627
1. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule.....	627
2. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur un conducteur mobile.....	630
3. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur un élément de courant.....	631
4. Influence d'un courant fermé quelconque sur un flux électronique.....	631
5. Influence d'un plan uniformément chargé sur un flux électronique.....	632
6. Conclusions.....	633

CHAPITRE V. — <i>Loi générale relativiste d'interaction entre particules non accélérées.</i>	634
1. Position du problème.....	634
2. Retour sur la notion de force.....	635
3. Forme de la loi particulière.....	636
4. Expression générale de la loi particulière.....	637
5. Expression générale de la loi élémentaire.....	640
6. Calcul des coefficients de la loi particulière.....	640
7. Conclusions.....	642
<i>Annexe au chapitre V. — Calcul de la force exercée par une particule mobile sur une particule fixe.</i>	646
CHAPITRE VI. — <i>Applications et conséquences de la loi particulière relativiste sans accélération.</i>	648
1. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur une particule.....	648
2. Influence d'un courant rectiligne indéfini sur un conducteur mobile.....	649
3. Influence d'un plan uniformément chargé sur un flux électronique.....	649
CHAPITRE VII. — <i>Loi générale relativiste d'interaction entre particules accélérées.</i>	654
1. Forme générale de la loi d'accélération.....	654
2. Plan suivi.....	656
A. Condition CV/E.....	657
3. Expression de la seconde loi de l'induction.....	657
4. Examen de la notion de flux magnétique.....	658
B. Condition C/P 2.....	660
5. Nécessité de l'étude de cette condition.....	660
6. Expression de la condition C/P 2 dans le cas général.....	660
7. Condition C/P 2 dans quelques cas particuliers.....	663
8. Forme générale des lois particulières admettant les conditions C/P 1 et C/P 2..	665
9. Généralisation aux circuits non homogènes ou à discontinuité de forme.....	667
10. Conclusions.....	669
CHAPITRE VIII. — <i>Loi d'interaction en fonction des positions retardées.</i>	671
1. Introduction.....	671
2. Calcul de l'influence en fonction de la position retardée.....	671
3. Calcul des coefficients de la loi classique à partir de la force relativiste.....	673
4. Calcul des coefficients de la loi classique à partir des potentiels de LIÉNARD....	674
5. Influence d'une particule oscillante.....	675
6. Conclusions relatives aux données expérimentales.....	677
7. Sources fictives d'influence.....	677
8. Calcul de la loi particulière en fonction de la source fictive correspondant à une vitesse de propagation quelconque de l'influence.....	678
9. Cas de la vitesse de propagation des ondes de DE BROGLIE.....	679
10. Conditions expérimentales partielles.....	680
11. Expressions des lois particulières avec les conditions expérimentales partielles..	681
12. Comparaison de différentes lois particulières possibles.....	683
<i>Annexe aux chapitres V, VI, VII et VIII. — Examen des solutions antérieurement proposées pour la loi particulière.</i>	685
<i>Annexe au chapitre VIII. — Influence d'une particule oscillante.</i>	689
1. Influence dans une direction perpendiculaire à la direction d'oscillation.....	689
2. Influence dans la direction de l'oscillation.....	691
3. Conclusions.....	692

CHAPITRE IX. — <i>Analyse des notions de force et de masse</i>	693
1. Possibilité de différentes définitions de la force.....	693
2. Expression générale de la loi particulière dans le cas d'une définition quelconque de la force.....	699
3. Expression de la condition de champ.....	702
4. Remarque relative à la notion de force.....	704
5. Examen des différentes lois particulières possibles.....	707
CHAPITRE X. — <i>Interaction électromagnétique dans le cas général. Loi particulière quelconque (définition quelconque de la force)</i>	709
1. Introduction.....	709
2. Influence d'un système de particules sur une particule.....	709
3. Influence d'un courant sur un élément.....	711
4. Influence d'un courant sur une particule.....	712
5. Remarques à propos de l'expérience de KAUFMAN-BUCHERER.....	713
6. Vérification expérimentale de la condition de champ.....	715
7. Application à l'induction unipolaire.....	716
8. Généralisation de l'induction unipolaire.....	719
CONCLUSIONS.....	720
Références.....	725

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

**LA PROPULSION SPATIALE
À SOURCE D'ÉNERGIE SÉPARÉE**

Vu et approuvé :

Paris, le 26 juin 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris

JEAN ROCHE

